

# Theorie der Streuung schneller geladener Teilchen

## III. Die Vielfachstreuung von Bahns Spuren unter Berücksichtigung der statistischen Kopplung

Von G. MOLIÈRE

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen, und der Eberhard-Karls-Universität, Tübingen \*

(Z. Naturforschg. 10a, 177—211 [1955]; eingegangen am 28. September 1950)

Die Vielfachstreuung einer Bahnspur werde — wie üblich — bestimmt durch Einteilung dieser Spur in Abschnitte („Zellen“) und Messung gewisser, die Richtungsänderung von Zelle zu Zelle charakterisierender „Merkmale“. Als solche können z. B. gewählt werden: Winkel zwischen benachbarten Tangenten (Fall Ia) oder Sehnen (Fall IIa). Praktisch wichtig sind Merkmale, bei denen „Ausglättung“ („smoothing“) verwendet wird: Winkel zwischen „best-angepaßten Geraden“ (Fall Ib) bzw. den Verbindungsgeraden der „Schwerpunkte“ (Fall IIb, „sagitta“-Methode) benachbarter Zellen. — Für die verschiedenen Fälle wird die auf Vielfachstreuung beruhende Verteilungsfunktion der Merkmale aufgestellt unter strenger Berücksichtigung der statistischen Kopplung zwischen diesen. Für die Fälle Ib und IIb wird außerdem die auf „unechter Streuung“ („spurious scattering“, „noise level“) beruhende Verteilung der Merkmale behandelt. Es wird gezeigt, daß die Koordinaten-Methode (IIb) wesentliche Vorteile gegenüber der Winkel-Methode (Ib) aufweist. — Im § 13 sind die praktischen Auswertungs-Verfahren beschrieben und die dabei benötigten Tabellen zusammengestellt. Im § 14 sind Methoden zur Trennung der echten und unechten Streuung behandelt.

Mit dem Gebiet der Kleinwinkel-Streuung schneller geladener Teilchen beschäftigen sich bereits zwei unter dem gleichen Titel erschienene, vorangehende Arbeiten I<sup>1</sup> und II<sup>2</sup> des Verf.; Gegenstand von I ist die quantenmechanische Berechnung des Wirkungsquerschnittes für Einzelstreuung mit Abschirmung auf Grund des Thomas-Fermi-Modells. Das Ergebnis — soweit es für die Weiterverwendung in der Theorie der Vielfachstreuung in Betracht kommt — kann durch die Interpolationsformel für den „Abschirmungswinkel“

$$\chi_a = \frac{Z^{1/2}}{0,4685 \cdot 10^{-8} k_0} \left[ 1,13 + 3,76 \left( \frac{zZ}{137\beta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{E, 1})$$

wiedergegeben werden, die zwischen den beiden Grenzfällen: „Streuung als reiner Beugungs-Effekt“ (Bornsche Näherung:  $zZ/(137\beta) \ll 1$ ) und „Streuung als reiner Brechungseffekt“ (klassische Näherung, WKB-Methode;  $zZ/(137\beta) \gg 1$ ) in einer Weise interpoliert, die auch im Übergangsbereich die exakte Lösung genügend gut annähert. — In II wurde das Verteilungsgesetz für ein einzelnes, auf Vielfachstreuung beruhendes „Merkmal“ berechnet, und zwar für die beiden Fälle, daß dieses „Merkmal“ der räumliche Winkel  $\Theta$  und daß es der projizierte Winkel  $\Phi$  zwischen Anfangs- und Endtangente der Bahn ist. Dieses Verteilungsgesetz hängt von zwei Parametern ab, nämlich einem charakteristischen Winkel:

$$\chi_c = \frac{zZe^2}{pv} (4\pi Nl)^{1/2} = \chi_c' \sqrt{l} \quad (\text{E, 2})$$

( $N$  Dichte der streuenden Atome;  $l$  Länge der Bahn) und dem Abschirmungswinkel  $\chi_a$  nach (E, 1), bzw. an dessen Stelle einem Parameter  $B$ , der gegeben ist als die größere Lösung der Gleichung:

$$B - \ln B = \ln \frac{e\chi_c'^2 l}{\gamma^2 \chi_a^2}. \quad (\text{E, 3})$$

[ $\ln(e/\gamma^2) = -0,154$ .] Das Ergebnis in II wurde in Form einer Funktions-Entwicklung nach fallenden Potenzen von  $B$  erhalten. Das erste Glied dieser Entwicklung hat die bekannte Form der Gauß-Funktion, während das nächste und die folgenden Glieder den „Einfachstreuungs-Schwanz“ sowie den Übergang zu diesem enthalten. — Snyder und Scott<sup>3</sup> haben unabhängig und nach einem anderen (im Grunde genommen mit dem unseren sehr nahe verwandten) Verfahren für den Fall des projizierten Winkels eine Lösung erhalten, die (abgesehen von Unterschieden in dem zugrunde gelegten Einzelstreugesetz und der Art der Darstellung der Ergebnisse, die sie in Tabellenform angeben) der unseren äquivalent ist<sup>3a</sup>.

\* Jetzt: Instituto de Física Teórica, Rua Pamplona 145, São Paulo, Brasilien.

<sup>1</sup> G. Molière, Z. Naturforschg. 2a, 133 [1947].

<sup>2</sup> G. Molière, Z. Naturforschg. 3a, 78 [1948].

Im folgenden zitiert als „II“.

<sup>3</sup> H. S. Snyder u. W. T. Scott, Phys. Rev. 76, 220 [1949].

<sup>3a</sup> Anm. b. d. Korr.: Die erste korrekte Behandlung der Kleinwinkel-Vielfachstreuung, beruhend auf einer Kugelfunktions-Entwicklung, stammt von Goudsmit u. Saunderson, Phys. Rev. 57, 24 u.

552 [1940]; 58, 36 [1940]. — Neuerdings hat H. A. Bethe, Phys. Rev. 89, 1256 [1953], die verschiedenen Theorien der Vielfachstreuung kritisch verglichen und zugleich eine Reihe wesentlicher Ergänzungen und Verbesserungen zu II gegeben. Anschließend wurden theoretische Erweiterungen behandelt von U. Fano, Phys. Rev. 93, 117 [1954] und von L. V. Spencer u. C. H. Blanchard, Phys. Rev. 93, 114 [1954]. — Die experimentelle Prüfung von II ist Gegenstand der Arbeit von Hanson, Lanzl, Lyman u. Scott, Phys. Rev. 84, 634 [1951].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition “no derivative works”). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Seit den großen Fortschritten, die in den letzten Jahren in der Anwendung der photographischen Emulsion zur Untersuchung von Teilchen-Spuren erzielt werden konnten, hat die Theorie der Vielfachstreuung zur Auswertung dieser Spuren und zur Bestimmung der Eigenschaften der sie erzeugenden Teilchen eine ständig zunehmende Anwendung gefunden. Seit der Verwendung der „elektrosensitiven“ Platten und der Vervollkommen der technischen Verfahren, insbesondere zur Vermeidung von Verzerrungen in der photographischen Schicht (Brüssel-Gruppe), ist die Grenze der Energie-Bestimmung nach dieser Methode immer weiter hinauf verlegt worden. — Die dabei verwendeten Methoden beruhen auf einer direkten Winkelmessung und wurden von verschiedenen Autoren beschrieben<sup>4-6</sup>. Eine weitere Arbeit von Fowler<sup>7</sup> bezieht sich auf die Auswertung von Koordinatenmessungen („sagitta“-Methode; Näheres vgl. unten). Die kombinierte Auswertung der Streuung zugleich mit magnetischer Ablenkung beschreibt Goldschmidt-Clérmont<sup>8</sup> für die photographische Schicht sowie Groetzinger und Mitarbb.<sup>9</sup>. Letztere wenden für die Streuung der Nebelkammer-Spuren sehr ähnliche Methoden an, wie sie von den Platten her bekannt sind<sup>9a</sup>.

Bei allen diesen Methoden wird die zu untersuchende Spur in Abschnitte oder „Zellen“ — meist von gleicher Länge — eingeteilt, und die geeigneten „Merkmale“, d. h. Winkelgrößen (beruhend entweder auf direkter Winkel- oder auf Koordinaten-Messung), die die Richtungsänderungen der Spur von Zelle zu Zelle beschreiben, werden ausgemessen. Bei der Anwendung der Theorie der Vielfachstreuung wurden bisher durchweg die einzelnen Merkmale als statistisch unabhängig betrachtet, so daß das Verteilungsgesetz für die  $n$  Merkmale einer Spur die Gestalt eines Produktes von Verteilungsgesetzen für je ein einzelnes Merkmal hat. Damit dies gerechtfertigt ist, muß man die Merkmale — unter Verminderung ihrer Anzahl — so auswählen, daß die statistische Kopplung klein ist (z. B. indem man nicht die Richtungs-Änderungen zwischen benachbarten, sondern zwischen weiter voneinander entfernten Zellen als „Merkmale“ verwendet). Dies gilt um so mehr, als die bei den Platten-Spuren notwendig verwendete „Ausglättung“ („smoothing“, bestehend in einer gewissen Mittelung über die Richtung bzw. Lagekoordinate der Körner längs einer Zelle) sich in einer vermehrten statistischen Kopplung auswirkt. Hinzu kommt, daß bei Platten-Spuren die sogenannte „unechte Streuung“ („spurious scattering“, „noise level“, vgl. <sup>4,5</sup>) zu einer Vergrößerung der gewählten Zell-Länge bzw. des verwendeten Abstandes zwischen den aus-

genutzten Zellen zwingt und sich damit in der gleichen Richtung auswirkt.

Um die statistische Genauigkeit zu erhöhen — als Ergänzung zu den ständig verfeinerten experimentellen Methoden — erscheint es daher notwendig, auch die theoretischen Hilfsmittel so weiterzuentwickeln, daß der Korrelation — unter Einbeziehung der Ausglättung und der unechten Streuung — in Strenge Rechnung getragen wird. Dies ist in der vorliegenden Arbeit geschehen (mit der Einschränkung, daß der Einfluß der „Einfachstreuung“ vorerst nur für die Verteilungsfunktionen einzelner Merkmale ausgewertet wurde).

Bezüglich der Wahl der Merkmale betrachten wir die folgenden Fälle (vgl. Abb. 1):

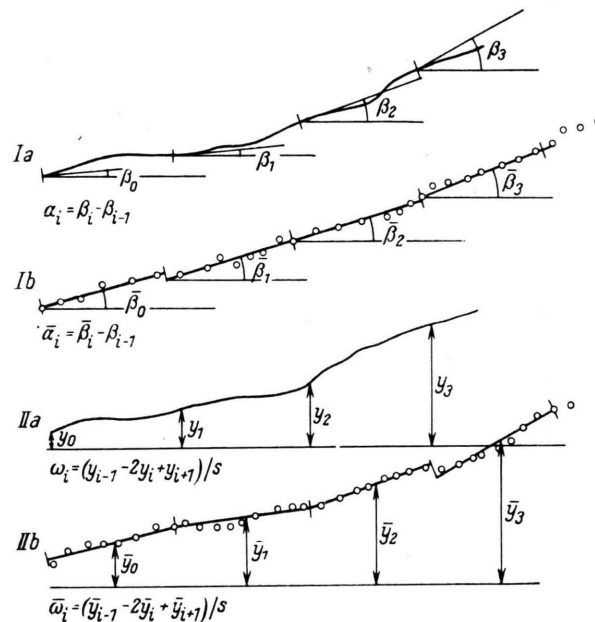


Abb. 1. Die die Streuung charakterisierenden Merkmale in den Fällen Ia bis IIb.

**Fall Ia** (Idealfall der Winkel-Messung): Gemessen werden die Winkel  $\beta_i$  der Tangenten in äquidistanten Bahnpunkten bezüglich einer willkürlichen Geraden. Statistisch ausgewertet werden die Winkel  $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1}$ .

**Fall Ib** (Realfall der Winkel-Messung): Gemessen werden Winkel  $\bar{\beta}_i$  der den Zellen angepaßten „besten Geraden“ gegenüber einer Bezugs-Geraden. Die auszuwertenden Merkmale sind die  $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i - \bar{\beta}_{i-1}$ .

<sup>4</sup> Y. Goldschmidt-Clérmont, D. T. King, H. Muirhead u. D. M. Ritson; Proc. Phys. Soc. Lond. **61**, 138 [1948].

<sup>5</sup> J. H. Davies, W. O. Lock u. H. Muirhead, Phil. Mag. **40**, 1250 [1949].

<sup>6</sup> Y. Goldschmidt-Clérmont, Nuovo Cim. **7**, 331 [1950].

<sup>7</sup> P. H. Fowler, Phil. Mag. **41**, 169 [1950].

<sup>8</sup> Y. Goldschmidt-Clérmont u. M. Merlin, Nuovo Cim. **7**, 220 [1950].

<sup>9</sup> G. Groetzinger, M. J. Berger u. F. L. Ribe, Phys. Rev. **77**, 584 [1950].

<sup>9a</sup> Anm. b. d. Korrr.: Vgl. dazu die neueren Arbeiten (dort auch weitere Literatur-Angaben): Gottstein, Menon, Mulvey, O'Ceallaigh u. Rochat, Phil. Mag. **42**, 708 [1951]; B. d'Espagnat, C. R. Acad. Sci., Paris, **232**, 800 [1951]; C. C. Dilworth, Nuovo Cim., Suppl., **11**, 203 [1954]; Fay, Gottstein u. Hain, ibid. **11**, 234 [1954]; R. Levi Setti, ibid. **11**, 207 [1954].



*Fall IIa* (Idealfall der Koordinaten-Messung): Gemessen werden die Koordinaten  $y_i$ ; ausgewertet werden die Sehn-Winkel benachbarter Zellen, d. h. die Größen  $\omega_i = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})/s$  ( $s$  Zell-Länge).

*Fall IIb* (Realfall der Koordinaten-Messung): Gemessen werden die Schwerpunkts-Koordinaten  $\bar{y}_i$  der Zellen (bezogen auf eine willkürliche Bezugsgerade). Merkmale für die Auswertung sind die Größen  $\bar{\omega}_i = (\bar{y}_{i-1} - 2\bar{y}_i + \bar{y}_{i+1})/s$ .

Nachträglich bei der Korrektur konnte auch — einem Vorschlag von Rochat <sup>†13</sup> folgend — ein zwischen IIa und IIb liegender intermediärer Fall IIc in die Behandlung eingeschlossen werden, der der praktischen „sagitta“-Methode nach Fowler<sup>7</sup> speziell angepaßt ist.

Ergänzend werden auch die (mit IIIa bzw. IIIb bezeichneten) kombinierten Fälle der gleichzeitigen Winkel- und Koordinaten-Messung behandelt, die wohl praktisch nur dann in Betracht kommen dürften, wenn eine (relativ) kurze Spur mit nur einer geringen Anzahl von Zellen mit noch möglichst großer Genauigkeit ausgewertet werden soll. (In allen behandelten Fällen sind nur solche Merkmale in Betracht gezogen worden, die sich auf die Projektion der Spur auf eine Ebene beziehen, da nur diese der Messung bequem zugänglich sind.)

Soweit mir bekannt, ist die Korrelation zwischen auf Vielfachstreuung beruhenden Merkmalen bisher nur in einem Fall von zwei Merkmalen (End-Koordinate und End-Winkel) von Fermi behandelt worden (mitgeteilt bei Rossi und Greisen<sup>10</sup>) und unabhängig von Bothe<sup>11</sup>. — Während der Abfassung dieser Arbeit wurde mir bekannt, daß sich Moyal<sup>12</sup> (Manchester) unabhängig davon mit dem gleichen Gegenstand beschäftigt.

## § 1. Die Verteilungsfunktion für $n$ auf Vielfachstreuung beruhende „Merkmale“

Wir betrachten eine Bahnspur, deren Vielfachstreuung durch  $n$  geeignete „Merkmale“  $x_1, x_2, \dots, x_n$  charakterisiert sei. Als wesentliche Eigenschaft der  $x_i$  setzen wir voraus, daß sie durch „Akkumulation“ zustande kommen, d. h. jeder der vielen Coulombschen Einzelstreuakte, die das Teilchen beim Durchlaufen seiner Bahn erfährt, soll einen Beitrag  $x_i$  zu (im allgemeinen) jeder der Größen  $x_i$  liefern, derart, daß jedes Merkmal  $x_i$  die Summe der vielen zugehörigen Beiträge  $x_i'$  darstellt. — Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen beim Durchlaufen seiner Bahn einen Einzelstreuakt von der Art erfährt, daß dabei Beiträge  $x_1', x_2',$

$\dots, x_n'$  innerhalb der Intervalle  $dx_1', dx_2', \dots, dx_n'$  auftreten, sei  $W(x_1', x_2', \dots, x_n')$   $dx_1' dx_2' \dots dx_n'$  oder kurz — indem wir den  $n$ -dimensionalen Vektor  $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$  und das zugehörige  $n$ -dimensionale Volumenelement  $d^n x'$  einführen —:  $W(\mathbf{x}') d^n x'$ . Die  $n$ -dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte  $W$  (deren spezielle Gestalt wir weiter unten betrachten werden) sei als  $n$ -faches Fourier-Integral gegeben:

$$W(\mathbf{x}') = (2\pi)^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int d^n \xi e^{i(\mathbf{x}', \vec{\xi})} \Omega(\vec{\xi}), \quad (1,1)$$

wobei die entsprechende Vektorschreibweise für die Variablen  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  verwendet ist.

*Bemerkung:* Zwei mathematische Eigenschaften von Fourier-Integralen der Form (1,1) seien hier angemerkt:

(1) „Projektion“ und „Normierung“. Wünscht man von einer durch ein  $n$ -faches Fourier-Integral der Art (1,1) dargestellten Verteilungsfunktion dadurch, daß man über eine der Variablen, z. B.  $x_n'$ , integriert, zu einer entsprechenden Verteilungsfunktion in  $(n-1)$  Dimensionen überzugehen, so folgt für die letztere ein  $(n-1)$ -faches Fourier-Integral der gleichen Art, dessen Fourier-Transformierte  $\Omega$  aus derjenigen in (1,1) durch Nullsetzen der (zu  $x_n'$ , worüber integriert wurde, gehörigen) Variablen  $\xi_n$  hervorgeht („Projektion im  $n$ -dimensionalen Raum der  $x_i'$  auf eine  $(n-1)$ -dimensionale Hyper-Ebene“). — Führt man diesen Prozeß nacheinander für alle  $n$  Variablen aus („Normierung“), so folgt für das Integral über den ganzen  $x'$ -Raum:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int W(\mathbf{x}') d^n x' = \Omega(0) \equiv \Omega_0. \quad (1,2)$$

In dem hier betrachteten Fall bedeutet die Größe  $\Omega_0$  nach (1,2) die mittlere Anzahl von Einzelstreuprozessen, die das Teilchen beim Durchlaufen seiner Bahn überhaupt erfährt.

(2) „Faltung“. Sind  $W_1(\mathbf{x}), W_2(\mathbf{x}), \dots, W_k(\mathbf{x})$  Funktionen im  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathbf{x}$ , dargestellt durch Fourier-Integrale der Form (1,1) mit Fourier-Transformierten  $\Omega_1(\vec{\xi}), \Omega_2(\vec{\xi}), \dots, \Omega_k(\vec{\xi})$ , so ist das „Faltungsprodukt“:

$$W_1 * W_2 * \dots * W_k(\mathbf{x}) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int W_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}') W_2(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \dots \\ \dots W_k(\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}) d^n x' d^n x'' \dots d^n x^{(k)} \quad (1,3)$$

ein Fourier-Integral der gleichen Form, dessen Fourier-Transformierte das gewöhnliche Produkt  $\Omega_1(\vec{\xi}) \Omega_2(\vec{\xi}) \dots \Omega_k(\vec{\xi})$  ist. Speziell für  $k$  gleiche Funktionen  $W_1 = W_2 = \dots = W_k = W$  schreiben wir das Faltungsprodukt als

<sup>10</sup> Vgl. B. Rossi u. K. Greisen, Rev. Mod. Phys. **13**, 240 [1941], Gl. (1,62) S. 267.

<sup>11</sup> W. Bothe: unveröffentlichtes Manuskript, das im September 1945 bei der Heidelberger Akademie der Wissenschaften hinterlegt wurde.

<sup>12</sup> Inzwischen veröffentlicht J. E. Moyal, Phil. Mag.

**41**, 1058 [1950]. Vgl. hierzu <sup>18</sup> in § 14 vorliegender Arbeit sowie d'Espagnat<sup>9a</sup>. Vgl. ferner auch: G. Dôme, Estimation de la courbure magnétique des traces laissées par les particules ionisantes dans les émulsions photographiques. Thèse. Université libre de Bruxelles, Juillet 1950.

„ $k$ -te Faltungs-Potenz“  $W^{k*}(\mathbf{r})$ , deren Fourier-Transformierte die (gewöhnliche)  $k$ -te Potenz  $\Omega^k(\vec{\xi})$  der zu  $W$  gehörigen Fourier-Transformierten ist.

Es sei nun  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = f(\mathbf{r}) d^n x$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die akkumulierten Merkmale Werte bei  $x_i$  in  $dx_i$  haben. Analog wie in II zerlegen wir die Verteilungsfunk-

tion  $f(\mathbf{r})$  in Anteile  $f_0(\mathbf{r}), f_1(\mathbf{r}), \dots, f_k(\mathbf{r}) \dots$  davon herrührend, daß beim Durchlaufen der Bahn 0, 1, 2,  $\dots$   $k$ ,  $\dots$  Einzelstreuprozesse aufgetreten sind. Es bedeute  $f_k(\mathbf{r}) d^n x$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $k$  Einzelstreuprozesse und als Folge davon Merkmal-Werte bei  $x_i$  in  $dx_i$  auftreten. Man erhält analog wie in II:

$$f_0(\mathbf{r}) = e^{-\Omega_0} \delta(\mathbf{r}) = e^{-\Omega_0} (2\pi)^{-n} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d^n \xi e^{i(\mathbf{r}, \vec{\xi})}, \quad (1,4a)$$

$$f_1(\mathbf{r}) = e^{-\Omega_0} W(\mathbf{r}) = e^{-\Omega_0} (2\pi)^{-n} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d^n \xi e^{i(\mathbf{r}, \vec{\xi})} \Omega(\xi), \quad (1,4b)$$

$$f_2(\mathbf{r}) = e^{-\Omega_0} W^{2*}(\mathbf{r})/2! = e^{-\Omega_0} (2\pi)^{-n} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d^n \xi e^{i(\mathbf{r}, \vec{\xi})} \Omega^2(\vec{\xi})/2!, \quad (1,4c)$$

$$f_k(\mathbf{r}) = e^{-\Omega_0} W^{k*}(\mathbf{r})/k! = e^{-\Omega_0} (2\pi)^{-n} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d^n \xi e^{i(\mathbf{r}, \vec{\xi})} \Omega^k(\vec{\xi})/k!. \quad (1,4d)$$

Durch Aufsummieren erhält man für die gesamte Verteilungsfunktion der akkumulierten Merkmale, entsprechend unserem früheren Ergebnis (4,4) in II:

$$f(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-n} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d^n \xi e^{i(\mathbf{r}, \vec{\xi})} e^{\Omega(\vec{\xi}) - \Omega_0}. \quad (1,5)$$

## § 2. Die allgemeine Korrelation zwischen „Merkmalen $x_i$ “ und dem Streuwinkel $\Phi$ am Bahnende

Wir betrachten zunächst — als ein ausgezeichnetes „Merkmal“ der Streuung — den projizierten Streuwinkel  $\Phi$  zwischen den Tangenten am Endpunkt und am Anfangspunkt der Bahn. Wir werden nachher die Verteilungsfunktion für beliebige Merkmale  $x_i$ , wie sie allgemein durch (1,5) gegeben ist, dadurch näher bestimmen, daß wir die Kopplung zwischen den bei einer Einzelstreuung auftretenden Beiträgen  $x_i'$  zu den Merkmalen  $x_i$  und dem Beitrag  $\Phi'$  zum Endstreuwinkel  $\Phi$  in Betracht ziehen.

Sei die Weglänge längs der Bahn. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß auf einem Wegelement  $dl$  ein Einzelstreuprozess mit einem Beitrag  $\Phi'$  in  $d\Phi'$  zum Endstreuwinkel  $\Phi$  auftritt, ist (wie man leicht durch Integration der Formel (6,1) in II über die zur Projektionsebene senkrechte Winkelkomponente erhält):

$$w(\Phi') d\Phi' dl = \frac{1}{2} \chi_c'^2 (\Phi'^2 + \chi_a^2)^{-3/2} d\Phi' dl. \quad (2,1)$$

Dabei unterscheiden wir zwischen positiven und negativen Winkeln  $\Phi'$ , je nachdem, ob die Ablenkung nach der einen oder anderen Seite erfolgt. Die Größen  $\chi_c'$  und  $\chi_a$  in (2,1) sind durch die Gl. (6,2) und (6,3) in II gegeben; sie sind Funktionen

der Energie und damit — bei Berücksichtigung des Energieverlustes längs der Bahn — Funktionen der Weglänge  $l$ . Bei Vernachlässigung des Energieverlustes können sie als Konstante angesehen werden.

Im folgenden wird die Fourier-Darstellung der Funktion  $w(\Phi')$  nach (2,1)

$$w(\Phi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{i\Phi' \xi} \omega(\xi) \quad (2,2)$$

bzw. deren Umkehrformel:

$$\omega(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi' e^{-i\Phi' \xi} w(\Phi') \quad (2,2')$$

benötigt werden. Aus der speziellen Gestalt (2,1) von  $w(\Phi')$  folgt

$$\omega(\xi) = (2\chi_c'^2/\chi_a^2) L_1(\chi_a \xi) \quad (2,3)$$

mit der gleichen Funktion  $L_1$ , wie sie bereits in II auftrat [vgl. z. B. II, Gl. (5,1)]. Benutzt man deren Reihenentwicklung [vgl. II, Gl. (6,7)], so folgt:

$$\omega(\xi) = \frac{\chi_c'^2}{\chi_a^2} + \left(\frac{\xi \chi_c'}{2}\right)^2 \log \frac{\gamma^2}{e} \left(\frac{\xi \chi_a}{2}\right)^2 + \dots \quad (2,3')$$

Nunmehr wollen wir außer der Endablenkung  $\Phi$  zugleich weitere Merkmale  $x_1, x_2 \dots$  in Betracht ziehen. Diese sollen so beschaffen sein, daß eine Einzelstreuung, die an einer bestimmten Stelle  $l$  der Bahn erfolgt, Beiträge  $x_i'$  zu den Merkmalen liefert, die zum Beitrag  $\Phi'$  des Endstreuwinkels proportional sind.

$$x_i' = a_i(l) \Phi' \quad (2,4)$$

mit Proportionalitätsfaktoren („Kopplungsfaktoren“)  $a_i(l)$ , die im allgemeinen von der Stelle  $l$ , an der die Einzelstreuung stattfindet, abhängen werden. (Z. B.: Wählt man als eines der Merkmale die Koordinate  $y$  der seitlichen Ablenkung im Endpunkt der Bahn, bezogen auf die vom Anfangspunkt in Richtung der Anfangstangente verlängerte Gerade, so hat man den zugehörigen Kopplungsfaktor  $a(l) = l_0 - l$  zu setzen, wobei  $l_0$  die Länge der Bahn bedeutet.)

Wegen der vollständigen Kopplung zwischen den  $x_i'$  und  $\Phi'$  läßt sich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Einzelstreuung längs eines Weges  $dl$ , die zu Beiträgen  $\Phi'$  in  $d\Phi'$  und  $x_i'$  in  $dx_i'$  Anlaß gibt, auf die entsprechende Wahrscheinlichkeit für  $\Phi'$  allein zurückführen, wie folgt:

$$w(\Phi', x_1', x_2', \dots) d\Phi' dx_1' dx_2' \dots dl \quad (2,5)$$

$$= w(\Phi') \delta(x_1' - a_1(l) \Phi') \delta(x_2' - a_2(l) \Phi') \dots d\Phi' dx_1' dx_2' \dots dl,$$

wobei  $w(\Phi')$  nach (2,1) eingesetzt zu denken ist, und  $\delta$  Diracsche  $\delta$ -Funktionen bedeutet. — (2,5) bezieht sich noch auf ein einzelnes Wegelement  $dl$ . Um die auf die ganze Bahnlänge bezogene Wahrscheinlichkeitsdichte  $W(\Phi', x_1', x_2', \dots, x_n')$  im Raum der  $(n+1)$  Variablen  $\Phi', x_1', \dots, x_n'$  — von der Art, wie sie im § 1 und in Gl. (1,1) betrachtet wurde — zu erhalten, haben wir somit über die Bahnlänge zu integrieren:

$$W(\Phi', x_1', \dots, x_n') \quad (2,6)$$

$$= \int dl w(\Phi') \delta(x_1' - a_1(l) \Phi') \dots \delta(x_n' - a_n(l) \Phi')$$

(wobei kurz  $a_i$  für  $a_i(l)$  steht).

Wir benutzen nun die Fourier-Umkehrung von (1,1) (in  $n+1$  Dimensionen), welche lautet:

$$\Omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad (2,7)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int d\Phi' dx_1' \dots dx_n' W(\Phi', x_1', \dots, x_n') \cdot e^{-i(\Phi' \xi + x_1' \xi_1 + \dots + x_n' \xi_n)}$$

mit der Funktion  $W$  nach (2,6). Wegen der darin auftretenden  $\delta$ -Funktionen lassen sich die Integrationen in (2,7) über die  $x_i'$  ausführen, so daß nur die Integration über  $\Phi'$  übrig bleibt. (2,7) geht damit — unter Benutzung von (2,6) — über in das einfache Fourier-Integral:

$$\Omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad (2,8)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi' \int dl w(\Phi') e^{-i\Phi'(\xi + a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n)}.$$

Dieses ist (abgesehen von der Integration über die Bahnlänge  $l$ , die wir *nach* derjenigen über  $\Phi'$  aus-

führen können) von der gleichen Gestalt wie (2,2') mit dem Unterschied, daß die Variable  $\xi$  ersetzt ist durch  $\xi + a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n$ . Mit Benutzung von (2,2') geht daher (2,8) über in:

$$\Omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_n) = \int dl \omega(\xi + a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n), \quad (2,9)$$

wobei  $\omega$  die durch (2,3) gegebene Funktion bedeutet. Benutzt man insbesondere deren Reihenentwicklung (2,3'), so erhält man, indem man zugleich die Variable  $\xi = 0$  setzt (vgl. unten) und berücksichtigt, daß  $\Omega_0 = \chi_c'^2 l_0 / \chi_a'^2$  [vgl. (1,2)] ist ( $l_0$  = gesamte Bahnlänge):

$$\Omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - \Omega_0 \quad (2,10)$$

$$= \int_0^{l_0} dl \frac{\chi_c'^2}{4} (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n)^2 \cdot \log \left[ \frac{\gamma^2 \chi_a'^2}{4e} (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n)^2 \right].$$

Daß wir die Variable  $\xi = 0$  gesetzt haben besagt, daß wir von der  $(n+1)$ -dimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichte in  $\Phi'$  und den  $x_i'$  zu der  $n$ -dimensionalen in den  $x_i'$  allein übergegangen sind [vgl. die Bemerkung über „Projektion“ im Anschluß an Gl. (1,1)].

Gl. (2,10) ist der allgemeine Ausdruck des in (1,5) einzusetzenden Exponenten. — Unsere weitere Aufgabe wird darin bestehen, Gl. (1,5) zusammen mit (2,10) auszuwerten, wobei es wesentlich auf die für die jeweilige Wahl der „Merkmale“ charakteristische Abhängigkeit der Kopplungsfaktoren  $a_i(l)$  von der Weglänge  $l$  (die der Kürze halber in den letzten Formeln nicht ausdrücklich bezeichnet wurde) ankommen wird. — Bei Berücksichtigung des Energieverlustes sind in (2,10) auch  $\chi_c'$  und  $\chi_a'$  Funktionen von  $l$  (vgl. II, § 6).

### § 3. Endwinkel $\Phi$ und Endkoordinate $y$ als Beispiel korrelierter Merkmale

Als einfaches Beispiel behandeln wir die Verteilungsfunktion in den zwei Merkmalen  $x_1 = \Phi$  (Winkel zwischen den Tangenten im Endpunkt und Anfangspunkt der Bahn) und der Endkoordinate  $y$  (seitliche Verschiebung des Endpunktes in bezug auf die verlängerte Anfangstangente) bzw. der ihr äquivalenten Größe  $x_2 = \psi = y/l_0$  ( $l_0$  Länge der Bahn;  $\psi$  Winkel zwischen Sehne und Anfangstangente: vgl. Abb. 2). Für die Kopplungsfaktoren nach (2,4) haben wir dann zu setzen:

$$a_1 = 1 \text{ und } a_2 = 1 - l/l_0, \quad (3,1)$$

und die Verteilungsfunktion lautet nach (1,5):



$$f(\Phi, \psi) = (2\pi)^{-2} \iint d\xi_1 d\xi_2 e^{i(\Phi \xi_1 + \psi \xi_2)} e^{\Omega(\xi_1, \xi_2) - \Omega_0}. \quad (3,2)$$

Im Gültigkeitsbereich der Theorie der Vielfachstreuung (vgl. II, § 11) ist hierin  $\Omega(\xi_1, \xi_2) - \Omega_0$  nach (2,10) einzusetzen, also, indem zweckmäßig  $a_2$  nach (3,1) an Stelle von  $l$  als Integrationsvariable verwendet wird ( $a_2$  ist die vom Endpunkt der Bahn aus gerechnete Wegstrecke in der Einheit der Bahnlänge  $l_0$ ):

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) - \Omega_0 = \int_0^1 da_2 \frac{\chi_c'^2 l_0}{4} (\xi_1 + a_2 \xi_2)^2 \log \frac{\gamma^2 \chi_a'^2 (\xi_1 + a_2 \xi_2)^2}{4e}. \quad (3,3)$$

Soll der Energieverlust längs der Bahn berücksichtigt werden, so sind dabei  $\chi_c'$  und  $\chi_a$  als Funktionen von  $l$  bzw.  $a_2$  zu betrachten. Kann der Energieverlust vernachlässigt und somit  $\chi_c'$  und  $\chi_a$  als Konstante angesehen werden, so folgt aus (3,3) nach Ausführung der Integration:

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) - \Omega_0 = \frac{\chi_c'^2 l_0}{12 \xi_2} \left[ (\xi_1 + \xi_2)^3 \log \frac{\gamma^2 \chi_a'^2 (\xi_1 + \xi_2)^2}{4e^{3/2}} - \xi_1^3 \log \frac{\gamma^2 \chi_a'^2 \xi_1^2}{4e^{3/2}} \right]. \quad (3,3')$$

Die weitere Auswertung wollen wir nun zunächst in der Weise ausführen, daß wir durch „Projektion“ in der  $\Phi, \psi$ -Ebene auf eine geeignete Achse (vgl. die diesbezügliche Bemerkung in § 1) von der zweidimensionalen zu einer eindimensionalen Verteilungsfunktion übergehen.

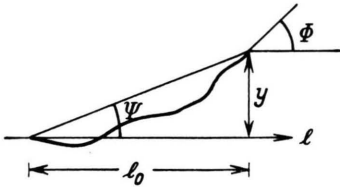


Abb. 2. Die Winkel  $\Phi$  und  $\psi$  zwischen Anfangs- und Endtangente bzw. Anfangstangente und Sehne.

Dazu führen wir zunächst in der  $\Phi, \psi$ -Ebene eine orthogonale Transformation (= Drehung um einen Winkel  $\lambda$ ) aus:

$$x = \Phi \cos \lambda + \psi \sin \lambda \quad (3,4a)$$

$$\bar{x} = -\Phi \sin \lambda + \psi \cos \lambda. \quad (3,4b)$$

Für die  $\xi$ , die sich in gleicher Weise transformieren, benötigen wir die inverse Transformation:

$$\xi_1 = \xi \cos \lambda - \bar{\xi} \sin \lambda, \quad (3,5a)$$

$$\xi_2 = \xi \sin \lambda + \bar{\xi} \cos \lambda. \quad (3,5b)$$

Die Verteilungsfunktion in den neuen Variablen  $x$  und  $\bar{x}$  ist von der gleichen Form wie (3,2), wobei rechts unter dem Integralzeichen  $\Omega(\xi, \bar{\xi})$  durch die Substitutionen (3,5a und b) aus  $\Omega(\xi_1, \xi_2)$  hervorgeht. — Nunmehr gehen wir durch Integration von  $f(x, \bar{x})$  über die Variable  $\bar{x}$  zu der eindimensionalen Verteilungsfunktion  $f(x)$  in der Variablen  $x$  bzw. — indem wir noch einen Faktor 2 hinzufügen — zu der in  $|x|$  über:

$$f(|x|) = \frac{1}{\pi} \int d\eta e^{ix\eta} e^{\Omega(\xi) - \Omega_0}. \quad (3,6)$$

Dabei entsteht das im Exponenten auftretende  $\Omega(\xi)$  durch Nullsetzen von  $\bar{\xi}$  in  $\Omega(\xi, \bar{\xi})$  bzw. — mit Benutzung von (3,5a und b) — durch Einsetzen von

$$\xi_1 = \xi \cos \lambda \text{ und } \xi_2 = \xi \sin \lambda \quad (3,7)$$

in  $\Omega(\xi_1, \xi_2)$  nach (3,3) [bzw. (3,3')]. Mit den Abkürzungen

$$\cos \lambda = c \text{ und } \sin \lambda = s \quad (3,7)$$

(mit der Zell-Länge  $s$  ist keine Verwechslung zu befürchten!) ergibt dies:

$$\Omega(\xi) - \Omega_0 = \frac{l_0 \xi^2}{4} \int_0^1 da_2 \chi_c'^2(a_2) (c + s a_2)^2 \log [\gamma^2 \chi_a'^2(a_2) (c + s a_2)^2 \xi^2 / 4e]. \quad (3,8)$$

$$\text{Durch Einführung der Größen } x_c'^2 \equiv l_0 \int_0^1 da_2 \chi_c'^2(a_2) (c + s a_2)^2 \quad (3,9a)$$

$$\text{und } \log x_a'^2 = (l_0 / x_c'^2) \int_0^1 da_2 \chi_c'^2(a_2) (c + s a_2)^2 \log [\chi_a'^2(a_2) (c + s a_2)^2] \quad (3,9b)$$

$$\text{nimmt (3,8) die Standard-Form an: } \Omega(\xi) - \Omega_0 = (x_c'^2 \xi^2 / 4) \log (\gamma^2 x_a'^2 \xi^2 / 4e). \quad (3,10)$$

$$\text{Mit den Hilfsgrößen } \Omega_{b,x} \equiv x_c'^2 / x_a'^2 \quad (3,11a)$$

$$\text{und } b_x \equiv B_x - \log B_x \equiv \log (e \Omega_{b,x} / \gamma^2) \quad (3,11b)$$

[vgl. II (6,11) und (7,1)] sowie mit der neuen Variablen  $\eta = x_c \sqrt{B_x} \xi$  an Stelle von  $\xi$  nimmt (3,6) mit (3,10) die Gestalt an

$$f(|x|) d|x| = \frac{d|x|}{x_c \sqrt{B_x}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\eta_{\max}} d\eta \cos\left(\frac{|x|}{x_c \sqrt{B_x}} \eta\right) \exp\left[-\frac{\eta^2}{4} + \frac{\eta^2}{4B_x} \log \frac{\eta^2}{4}\right], \quad (3,12)$$

die bei Entwicklung der Exponentialfunktion nach Potenzen von  $(1/B_x)$  in die aus II, Gln. (8,4a und b) wohlbekannte Formel übergeht:

$$f(\varphi) d\varphi = d\varphi \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi^2} + \frac{1}{B_x} f^{(1)}(\varphi) + \frac{1}{B_x^2} f^{(2)}(\varphi) + \dots \right], \quad (3,13)$$

wobei jetzt  $\varphi = |x|/(x_c \sqrt{B_x})$  gesetzt ist.

$$(3,14)$$

Die in (3,13) auftretenden Funktionen sind in II, S. 89, Tab. 2 (Spalte III und IV) tabuliert. Ebenso übertragen sich alle Reihenentwicklungen, Mittelwerte in II, § 9 und § 10 usw. sowie speziell die dortige Formel (10,4) für den Mittelwert  $\bar{\varphi}$  auf den hier behandelten allgemeineren Fall. — Wir spezialisieren unsere Ergebnisse noch für den Fall, daß der Energieverlust vernachlässigbar und  $\chi_c'$  und  $\chi_a$  als Konstante zu betrachten sind. Die Ausführung der Integrationen in (3,9a und b) ergibt dann:

$$x_c^2 = \chi_c'^2 l_0 \left( c^2 + cs + \frac{s^2}{3} \right) \text{ und} \quad (3,15a \text{ u. } b)$$

$$\log x_a^2 = \log \chi_a^2 + \frac{(c+s)^3 \log(c+s)^2 - c^3 \log c^2}{(c+s)^3 - c^3} - \frac{2}{3}.$$

In Tab. 1 sind für einige charakteristische Fälle das Verhältnis  $x_c^2/\chi_c'^2 l_0$  und die Abweichung  $b_x - b$  [mit  $b_x$  nach (3,11b) und  $b = \log(e \chi_c'^2 l_0 / \gamma^2 \chi_a^2)$ ] aufgeführt.

$\lambda$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
$x$	$\Phi$	$(\Phi + \psi)/\sqrt{2}$	$\psi$	$(\psi - \Phi)/\sqrt{2}$
$x_c^2/\chi_c'^2 l_0$	1	7/6	1/3	1/6
$b_x - b$	0	-0,070	-0,432	-0,432

Tab. 1.

Die erste Spalte der Tab. 1 betrifft die Verteilung im Endwinkel  $\Phi$ . Sind für diese die maßgeblichen Konstanten  $\chi_c'^2 l_0$  und  $B$  bzw.  $b$  bekannt, so können die entsprechenden Konstanten für andere Wahl von  $x$  aus den folgenden Spalten [und mit Benutzung von (3,11b)] ermittelt werden. Insbesondere bezieht sich dabei die dritte Spalte auf die Verteilung in der Endkoordinate  $y = \psi l_0$ , während die zweite und vierte Spalte die Kopplung zwischen  $\Phi$  und  $y$  betreffen.

*Bemerkung.* Daß die Verteilungsfunktion  $f(|x|)$  für jede Wahl der Variablen  $x = c\Phi + s\psi$  die gleiche Gestalt (3,13) annimmt, haben wir insbesondere dadurch erreicht, daß wir die Größe  $B_x$  für jedes spezielle  $x$  in passender Weise gemäß (3,11b) gewählt haben. Statt dessen hätten wir auch für jedes  $x$  die gleiche Größe  $B$  gemäß

$$B - \log B = b = \log(e \chi_c'^2 l_0 / \gamma^2 \chi_a^2) \quad (3,16)$$

verwenden können. Führt man dementsprechend die Variable  $\eta = \xi x_c \sqrt{B}$  [abweichend von der in (3,12) benutzten] ein, so erhält man eine Formel, die sich von (3,12) nur dadurch unterscheidet, daß  $B_x$  durch  $B$  sowie der Exponent rechts unter dem Integralzeichen durch den etwas komplizierteren

$$-\frac{\eta^2}{4} + \frac{\eta^2}{4B} \left[ (b - b_x) + \log \frac{\eta^2}{4} \right] \quad (3,17)$$

ersetzt ist. Bei der anschließenden Entwicklung nach Potenzen von  $1/B$  erhält man statt (3,13):

$$f(\varphi) d\varphi = d\varphi \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi^2} + \frac{1}{B} \left[ f^{(1)}(\varphi) + (b_x - b) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \varphi^2 - \frac{1}{2} \right) e^{-\varphi^2} \right] + \dots \right\}, \quad (3,18)$$

wobei  $f^{(1)}(\varphi)$  die gleiche Funktion wie in (3,13), jedoch  $\varphi = |x|/x_c \sqrt{B}$  [abweichend von (3,14)] bedeutet. In dem [in (3,18) fortgelassenen] Entwicklungsglied mit  $1/B^2$  tritt eine noch nicht tabulierte zusätzliche Funktion auf. Beschränkt man sich auf die Entwicklung bis zum Gliede mit  $1/B$  bzw.  $1/B_x$ , so sind (3,13) und (3,18) gleichwertig. Der Unterschied in der Breite der als erstes Glied in (3,13) bzw. (3,18) abgespaltenen Gauß-Funktionen wird durch den Unterschied in den nächsten (und höheren) Entwicklungsgliedern kompensiert. Überdies ist der Unterschied — selbst bei Beschränkung auf die Gauß-Funktion — sehr gering, da sich  $\sqrt{B}$  und  $\sqrt{B_x}$  im allgemeinen (d. h. für  $B \approx 10$ ) um weniger als 3%, im ungünstigsten Fall (nämlich an der unteren Grenze der Theorie der Vielfachstreuung, d. h. nach II, § 11:  $B_x \approx 4,5$ ) um höchstens etwa 6% unterscheiden.

Wir wenden uns nun der zweidimensionalen Verteilungsfunktion (3,2) selber zu und beschränken uns dabei auf den Fall, daß der Energieverlust vernachlässigt werden kann, wobei also der Ex-

ponent in (3,2) durch (3,3') gegeben ist. Wir verwenden die durch (3,16) gegebene Größe  $B$  (die in der Auswahl dieser Größe in gewissen Grenzen bestehende Willkür ist nach der obigen Bemerkung unwesentlich!) und eliminieren  $\xi_1$  und  $\xi_2$  durch Einführung der neuen Variablen

$$\eta_1 = \xi_1 \chi_c' \sqrt{l_0 B} \text{ und } \eta_2 = \xi_2 \chi_c' \sqrt{l_0 B}, \quad (3,19)$$

womit (3,3') übergeht in

$$\Omega(\eta_1, \eta_2) - \Omega_0 = -\frac{1}{4} \left( \eta_1^2 + \eta_1 \eta_2 + \frac{\eta_2^2}{3} \right) \quad (3,20)$$

$$+ \frac{1}{12B} \left[ \frac{(\eta_1 + \eta_2)^3}{\eta_2} \log \frac{(\eta_1 + \eta_2)^3}{4 e^{2/3}} - \frac{\eta_1^3}{\eta_2} \log \frac{\eta_1^2}{4 e^{2/3}} \right].$$

Setzt man dies in (3,2) ein und entwickelt nach  $1/B$ , so folgt, wenn man zugleich die Abkürzung

$$\Phi_0 = \chi_c' \sqrt{l_0 B} \quad (3,21)$$

verwendet:

$$f(\Phi, \psi) = (2\pi \Phi_0)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 d\eta_2 e^{i(\Phi\eta_1 + \psi\eta_2)/\Phi_0} \quad (3,22)$$

$$\cdot e^{-1/4(\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \eta_2^2/3)} \left[ 1 + \frac{1}{B} \dots + \dots \right].$$

Vernachlässigt man die Glieder erster und höherer Ordnung in  $1/B$ , so läßt sich (3,22) leicht folgendermaßen auswerten: Wir führen die symmetrische Matrix

$$(A_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \quad (3,23)$$

ein, mit deren Hilfe sich der Exponent der zweiten Exponentialfunktion in (3,22) schreiben läßt:

$$-\frac{1}{4}(\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \eta_2^2/3) = -\frac{1}{4} \sum_i \sum_k A_{ik} \eta_i \eta_k. \quad (3,24)$$

Durch eine zugleich in der  $\Phi, \psi$ -Ebene und in der  $\eta_1, \eta_2$ -Ebene ausgeführte orthogonale Transformation der Art (3,4 a u. b), bei der  $(\Phi, \psi)$  bzw.  $(\eta_1, \eta_2)$  in  $(x, \bar{x})$  bzw.  $(\eta, \bar{\eta})$  übergehen möge, denken wir uns die Matrix (3,23) auf Diagonalförm gebracht; ihre Hauptwerte (die wir numerisch gar nicht benötigen werden) seien  $A$  und  $\bar{A}$ . Damit erhält man für (3,22) in der neuen Darstellung

$$f(x, \bar{x}) = (2\pi \Phi_0)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta d\bar{\eta} e^{i(x\eta + \bar{x}\bar{\eta})/\Phi_0} \quad (3,25)$$

$$\cdot e^{-1/4(A\eta^2 + \bar{A}\bar{\eta}^2)}.$$

Offenbar zerfällt nun das zweifache Fourier-Integral in (3,25) in ein Produkt von zwei einfachen Fourier-Integralen, die sich leicht auswerten lassen, mit dem Ergebnis:

$$f(x, \bar{x}) = \frac{1}{\pi \sqrt{A\bar{A}} \Phi_0^2} e^{-(x^2/A + \bar{x}^2/\bar{A})/\Phi_0^2}. \quad (3,25')$$

Wir bemerken nun, daß in (3,25') das Produkt  $A\bar{A} = \text{Det.}$  die Determinante der Matrix (3,23) bedeutet und daß  $1/A$  und  $1/\bar{A}$  die Hauptwerte der zu (3,23) reziproken Matrix  $(A_{ik}^{-1})$  sind. [ $A_{ik}$  und  $A_{ik}^{-1}$  sind in der Darstellung, in der (3,25) und (3,25') gilt, zugleich auf Diagonalförm!] Führen wir nun die zu der obigen inverse orthogonale Transformation aus, so geht (3,25') über in:

$$f(\Phi, \psi) = \pi^{-1} \Phi_0^{-2} \text{Det.}^{-1/2} \quad (3,26)$$

$$\cdot e^{-(A_{11}^{-1} \Phi^2 + 2A_{12}^{-1} \Phi\psi + A_{22}^{-1} \psi^2)/\Phi_0^2}.$$

Numerisch folgt nun leicht aus (2,23)

$$\text{Det.} = 1/12 \text{ und } (A_{ik}^{-1}) = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}. \quad (3,27)$$

Damit lautet unser Ergebnis (3,26):

$$f(\Phi, \psi) d\Phi d\psi = \frac{\sqrt{12} d\Phi d\psi}{\Phi_0^2} e^{-12(\Phi^2/3 - \Phi\psi + \psi^2)/\Phi_0^2}. \quad (3,28)$$

Dies ist in „normaler“ (oder: „Gaußscher“) Näherung die gesuchte Verteilungsfunktion für die Größen  $\Phi$  und  $\psi = y/l_0$ . Das gleiche Ergebnis hat Fermi<sup>10</sup> auf einem gänzlich anderen Wege erhalten. Ferner hat Bothe<sup>11</sup> das entsprechende Ergebnis für die räumlichen Ablenkungen  $\vec{\Theta}$  und  $\vec{y}$  auf eine sehr einfache Weise hergeleitet.

Das Verfahren, mit dessen Hilfe wir (3,28) abgeleitet haben, läßt sich auf Fälle beliebig hoher Dimensionszahl übertragen und wird im folgenden noch vielfach verwendet werden. Zur Auswertung auch des nächsten, zu  $1/B$  proportionalen Gliedes in (3,22) ist es allerdings nicht geeignet, weshalb hier noch ein weiteres Verfahren zur Auswertung von (3,22) wenigstens kurz angedeutet sei. Wir gehen wiederum aus von einer orthogonalen Transformation der Art (3,4 a u. b), jedoch nicht von der zuletzt betrachteten speziellen Hauptachsentransformation, sondern einer beliebigen, die von dem Winkel  $\lambda$  als Parameter abhängt. In der dadurch aus (3,22) entstehenden Funktion  $f(x, \bar{x})$  setzen wir  $\bar{x} = 0$ . Man erhält damit  $f(x, 0)$  in Form eines Fourier-Integrals bezüglich  $x$ , dessen Fourier-Transformierte [welche die über  $\bar{\eta}$  integrierte Fourier-Transformierte von  $f(\bar{x}, x)$  ist] vom Parameter  $\lambda$  abhängt. Es hängt also  $f(x, 0)$  von  $x$  und  $\lambda$  ab, und diese beiden Variablen können als Polarkoordinaten in der  $\Phi, \psi$ -Ebene aufgefaßt werden. — Das damit kurz angedeutete Verfahren führt bei Anwendung auf das erste Entwicklungsglied in (3,22) wiederum auf unser Ergebnis (3,28); ange-



wandt auf das nächste, zu  $1/B$  proportionale Glied in (3,22) führt es auf eine [der Funktion  $f^{(1)}(\varphi)$  in (3,13) sehr ähnlich geartete, jedoch nicht mit dieser identische] Funktion  $f^{(1)}(x)$ , die noch zwei von  $\lambda$  abhängige Parameter enthält.

#### § 4. Die Kopplungsfaktoren $a_i(l)$ für die Merkmale einer Bahnspur

Wir betrachten nun eine Bahnspur, die durch Teilungspunkte in gleichen Abständen  $s$  in Zellen eingeteilt sei und deren Streuung durch an den Zellen gemessene Merkmale charakterisiert sei. Die bei gegebenen Eigenschaften des Teilchens und der streuenden Materie bestehende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Merkmale soll bestimmt werden, wobei für die verschiedene mögliche Wahl dieser Merkmale die in der Einleitung aufgezählten Fälle zugrunde gelegt werden sollen. (Vgl. auch Abb. 1.) Zunächst müssen wir die den Merkmalen entsprechend diesen verschiedenen Fällen zugehörigen Kopplungsfaktoren  $a_i(l)$  [definiert durch Gl. (2,4)] bestimmen. Am einfachsten gelingt dies für die beiden „idealen“ Fälle Ia und IIa, die wir daher zunächst betrachten:

*Fall Ia:* Als Merkmale für die statistische Auswertung dienen die Winkel  $\alpha_i$  zwischen Endtangente und Anfangstangente der  $i$ -ten Zelle. Ist  $\Phi'$  die bei einem Einzelstreuakt auftretende Winkelablenkung, so ist der damit verknüpfte Beitrag  $\alpha_i' = \Phi'$  bzw.  $=0$ , je nachdem der Einzelstreuakt innerhalb oder außerhalb der  $i$ -ten Zelle stattfindet. Nach (2,4) ist also der zu  $\alpha_i$  gehörige Kopplungsfaktor:

$$a_i(l) = \begin{cases} 1 & \text{für } (i-1)s < l < is, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4,1)$$

*Fall IIa:* Als Merkmale für die statistische Auswertung dienen die Winkel  $\omega_i$  zwischen den Sehnen über der  $(i+1)$ -ten und  $i$ -ten Zelle.

Man kann diesen Winkel zerlegen gemäß:

$$\omega_i = \psi_i^{(+)} + \psi_i^{(-)}, \quad (4,2)$$

wobei  $\psi_i^{(+)}$  den Winkel zwischen Sehne und Anfangstangente der  $(i+1)$ -ten und  $\psi_i^{(-)}$  den zwischen Endtangente und Sehne der  $i$ -ten Zelle bedeutet. Die zugehörigen Kopplungsfaktoren setzen sich wegen der Linearität von (2,4) additiv zusammen. Nun sind die  $\psi_i^{(+)}$  und  $\psi_i^{(-)}$  von ganz entsprechender Art wie der in § 3 betrachtete Winkel  $\psi$ , dessen Kopplungsfaktor durch  $a_2$  in

(3,1) gegeben ist. Für den zu  $\omega_i$  gehörigen Kopplungsfaktor ergibt sich danach ein „dachförmiger“ Verlauf gemäß:

$$a_i(l) = \begin{cases} l/s - (i-1) & \text{für } (i-1)s < l < is, \\ (i+1) - l/s & \text{für } is < l < (i+1)s, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4,3)$$

*Vorbetrachtung zu den Fällen Ib und IIb.* Die Behandlung der „praktischen“ Fälle Ib und IIb ist weit schwieriger und macht einige Vorbetrachtungen nötig: Experimentell wird in diesen Fällen so vorgegangen, daß durch die geschwärzten Körner jeweils einer Zelle eine „best-angepaßte Gerade“ (oder kurz: „beste Gerade“) so gelegt wird, daß die geschwärzten Körner symmetrisch zu beiden Seiten derselben verteilt sind<sup>6</sup>. Diese beste Gerade, die nur auf die Lage der geschwärzten Körner (bzw. Nebeltröpfchen), die die Spur ausmachen, Bezug hat, wollen wir als die „praktische“ bezeichnen und von ihr eine „wirkliche“ beste Gerade unterscheiden, die dem unbekannten „wirklichen“ Verlauf der Bahn nach der Methode der kleinsten Quadrate angepaßt ist. Die Abweichung der praktischen von der wirklichen besten Geraden pflegt man als „unechte Streuung“ („spurious scattering“) zu bezeichnen; sie hat ihre Ursache darin, daß der (stetige) Bahnverlauf durch eine nur endliche Anzahl geschwärzter Körner der Spur markiert ist, deren Mittelpunkte überdies (infolge von Vorgängen in der photographischen Emulsion) gegenüber der Bahn stets mehr oder minder seitlich versetzt sind. Diese „unechte Streuung“ überlagert sich störend der zu messenden echten Streuung, wozu dann noch der von verschiedenen Quellen herrührende Meßfehler tritt\*. — Den Einfluß der unechten Streuung (und der Meßfehler) auf die Statistik der „Merkmale“ und die Berücksichtigung dieses Einflusses bei der Auswertung der Meßergebnisse ist in § 11 behandelt. Vorerst sehen wir von der „unechten“ Streuung gänzlich ab und beschäftigen uns ausschließlich mit der „wirklichen“ Bahn und den „wirklichen“ besten Geraden, die dem Bahnverlaufe längs jeder Zelle nach der Methode der kleinsten Quadrate zugeordnet werden können.

*Die „best-angepaßte Gerade“.* Der Bahnverlauf sei durch  $y=f(l)$  beschrieben, wobei  $y$  den senkrechten Abstand der Bahnpunkte von einer willkürlich gelegten Bezugsgeraden bedeutet, von der wir nur voraussetzen, daß sie der mittleren Bahnrichtung ungefähr parallel verläuft. (Die Bahn selbst soll nur geringe Richtungsänderungen aufweisen.)

(Die Weglänge  $l$  kann man sich ersetzt denken durch ihre Projektion auf die Bezugsgerade.) Wir wollen nun dem Bahnverlauf in der  $(i+1)$ -ten Zelle [also zwischen  $l=is$  und  $l=(i+1)s$ ] eine

\* Vgl. die ausführliche Diskussion über diese Dinge bei Goldschmidt<sup>6</sup> und bei Levi-Setti<sup>9a</sup>.

Gerade anpassen, deren Koordinate im Mittelpunkt dieser Zelle [also bei  $l = (i + 1/2)s$ ]  $\bar{y}_i$  und deren Neigungswinkel ( $\simeq$  Tangens)  $\bar{\beta}_i$  sei. Diese beiden Parameter sollen bestimmt werden aus der Bedingung:

$$\int_{is}^{(i+1)s} \{\bar{y}_i + \bar{\beta}_i (l - (i + 1/2)s) - f(l)\}^2 dl = \text{Min.}, \quad (4,4)$$

woraus folgt:

$$\bar{\beta}_i = \frac{12}{s^3} \int_{is}^{(i+1)s} f(l) (l - (i + 1/2)s) dl \quad (4,5)$$

$$\text{und} \quad \bar{y}_i = \frac{1}{s} \int_{is}^{(i+1)s} f(l) dl. \quad (4,6)$$

Die beiden durch (4,5) und (4,6) definierten Größen haben die gewünschte Eigenschaft von „Merkmalen“ insofern, als sie in additiver Weise durch „Akkumulation“ zustande kommen, so daß jeder Einzelstreuakt einen Beitrag zu diesen Größen liefert, der dem jeweiligen Einzelstreuwinkel  $\Phi'$  proportional ist. Um dies einzusehen, überlegen wir uns, daß der Bahnverlauf  $f(l)$  durch eine Zickzack-Kurve beschrieben wird, die aus lauter Geradenstücken zusammengesetzt ist und jeweils an den Stellen, wo Einzelstreuakte stattfinden, Knicke um die jeweiligen Winkel  $\Phi'$  aufweist. Wir können daher (in der stets von uns verwendeten Näherung kleiner Winkel, in der zwischen dem Richtungswinkel der Bahnkurve und dessen Tangens nicht unterschieden zu werden braucht) den Bahnverlauf in von den Einzelstreuakten herrührende Anteile zerlegen gemäß:

$$f(l) = y_0 + \beta_0 l + \sum_{\nu} h_{\nu}(l) \Phi^{(\nu)}. \quad (4,7)$$

Dabei sind  $y_0$  und  $\beta_0$  die Koordinate und der Richtungswinkel im Anfangspunkt der Bahn, bezogen auf die (willkürliche) Bezugsgerade;  $\sum_{\nu}$  erstreckt sich über alle längs der Bahn auftretenden Einzelstreuakte und  $\Phi^{(\nu)}$  (statt früher  $\Phi'$ ) bezeichnet die dabei auftretenden Einzelstreuwinkel. Die Funktionen  $h_{\nu}(l)$  in (4,7) sind definiert durch:

$$h_{\nu}(l) = \begin{cases} 0 & \text{für } l < l_{\nu} \\ l - l_{\nu} & \text{für } l > l_{\nu}, \end{cases} \quad (4,8)$$

wobei  $l_{\nu}$  die Stelle der Bahn bezeichnet, an der der  $\nu$ -te Einzelstreuakt stattfindet.  $f(l)$  setzt sich also additiv aus Beiträgen zusammen, die den Einzelstreuwinkeln  $\Phi^{(\nu)}$  proportional sind, und das

gleiche gilt daher nach (4,5) und (4,6) auch für die Größen  $\bar{\beta}_i$  und  $\bar{y}_i$ . Mit (4,7) folgt für diese

$$\bar{\beta}_i = \beta_0 + \sum_{\nu} \Phi^{(\nu)} \frac{12}{s^3} \int_{is}^{(i+1)s} h_{\nu}(l) (l - (i + 1/2)s) dl$$

(4,9)

und

$$\bar{y}_i = y_0 + (i + 1/2)s \beta_0 + \sum_{\nu} \Phi^{(\nu)} \frac{1}{s} \int_{is}^{(i+1)s} h_{\nu}(l) dl. \quad (4,10)$$

Damit sind wir zur Berechnung der Kopplungsfaktoren vorbereitet. Für den Kopplungsfaktor zunächst des Merkmals  $\bar{\beta}_i - \beta_0$  (= Winkel zwischen der  $i$ -ten „besten Geraden“ und der Tangente im Anfangspunkt der Bahn) folgt aus (4,9) unmittelbar:

$$a_{\bar{\beta}_i - \beta_0}(l_{\nu}) = \frac{12}{s^3} \int_{is}^{(i+1)s} h_{\nu}(l) (l - (i + 1/2)s) dl \quad (4,11)$$

$$= \begin{cases} 1 & l_{\nu} < is, \\ 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 & \text{für } is < l_{\nu} < (i + 1)s, \\ 0 & (i + 1)s < l_{\nu}. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung folgt dabei mit Benutzung von (4,8), und es ist zur Abkürzung  $\zeta = (l_{\nu} - is)/s$  gesetzt. Für den Kopplungsfaktor von  $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i - \bar{\beta}_{i-1}$  erhält man daraus unmittelbar (mit Benutzung derselben Abkürzung):

$$a_{\bar{\alpha}_i}(l_{\nu}) = \begin{cases} 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 & \text{für } is < l_{\nu} < (i + 1)s, \\ 1 - 3\zeta^2 - 2\zeta^3 & \text{für } (i - 1)s < l_{\nu} < is, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4,12)$$

Dies ist unser Ergebnis für den Fall Ib; es ist in Abb. 3 durch die zweite Kurve dargestellt und mit den übrigen Fällen verglichen. — Aus (4,11) erhält man auch leicht den Kopplungsfaktor für das Merkmal  $\bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_{i-1} = \bar{\beta}_i - \bar{\beta}_{i-1}$  [= Winkel zwischen der  $(i + 1)$ -ten und  $(i - 1)$ -ten besten Geraden, d. h. unter Auslassung der dazwischen liegenden  $i$ -ten Zelle].

Es bleibt nun nur noch der Fall IIb zu erledigen: Für den Kopplungsfaktor der Größe

$$\bar{\omega}_i = (\bar{y}_{i-1} - 2\bar{y}_i + \bar{y}_{i+1})/s$$

können wir nach (4,10) schreiben:

$$a_{\bar{\omega}_i}(l_{\nu}) = \left[ \int_{(i-1)s}^{is} - 2 \int_{is}^{(i+1)s} + \int_{(i+1)s}^{(i+2)s} \right] h_{\nu}(l) dl. \quad (4,13)$$

Die Ausrechnung nach (4,8) ergibt leicht unter Benutzung der Abkürzung  $\zeta' = (l_\nu - (i + 1/2)s)/s$  (anders als oben!):

$$\alpha_{\omega_i}(l_\nu) = \begin{cases} (3/2 - \zeta')^2/2 & (i+1)s < l_\nu < (i+2)s \\ 3/4 - \zeta'^2 & \text{für } is < l_\nu < (i+1)s \\ (3/2 + \zeta')^2/2 & (i-1)s < l_\nu < is \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4,14)$$

Die vierte Kurve in Abb. 3 gibt den Verlauf dieser Funktion wieder<sup>13</sup>.

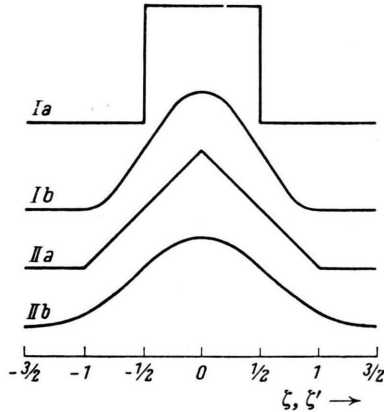


Abb. 3. Die Kopplungsfaktoren  $a_i(l)$  für die Fälle Ia u. IIa nach (4,1 u. 3) sowie Ib u. IIb nach (4,12 u. 14).

### § 5. Eindimensionale Verteilungsfunktionen

Wir denken uns aus der Gesamtheit der die Streuung einer Bahnspur beschreibenden Merkmale  $x_i$  (z. B. der Winkel  $\bar{\alpha}_i$  zwischen „besten Geraden“ benachbarter Zellen) ein bestimmtes, das wir mit  $x$  (ohne Index) bezeichnen, herausgegriffen und fragen nach der Verteilungsfunktion für die zu

erwartenden Meßwerte dieses Merkmals (bzw. seines Absolutwertes  $|x|$ ) *unabhängig davon*, welche Werte die übrigen Merkmale annehmen. Die fragliche Verteilungsfunktion ist von der Form (3,6), wobei im Exponenten  $\Omega(\xi) - \Omega_0$  nach (2,10), mit sämtlichen  $\xi_i = 0$  gesetzt mit Ausnahme des zu dem herausgegriffenen  $x$  gehörigen  $\xi$ , einzusetzen ist:

$$\Omega(\xi) - \Omega_0 = \int dl \frac{\chi_c'^2 a^2(l) \xi^2}{4} \log \frac{\gamma^2 \chi_a^2 a^2(l) \xi^2}{4e}. \quad (5,1)$$

Dabei ist  $a(l)$  der das Merkmal  $x$  charakterisierende „Kopplungsfaktor“. — Wir führen nun wieder [ähnlich wie in (3,9a und b) für den dort behandelten Spezialfall] die beiden Größen  $\chi_c$  und  $\chi_a$  ein gemäß:

$$\chi_c^2 \equiv \int dl \chi_c'^2 a^2(l) \quad (5,2a)$$

und

$$\log \chi_a^2 \equiv \frac{1}{\chi_c^2} \int dl \chi_c'^2 a^2(l) \log [\chi_a^2 a^2(l)], \quad (5,2b)$$

womit (5,1) die Standardform (3,10) annimmt. Damit übertragen sich auch alle Folgerungen des § 3, und es ergibt sich insbesondere für die Verteilungsfunktion  $f(|x|)$  die Formel (3,13) mit  $\varphi = |x|/(x_c \sqrt{B_x})$  oder die alternative Formel (3,18) mit  $\varphi = |x|/(x_c \sqrt{b})$ ; dabei ist  $B_x$  bzw.  $b_x$  durch (3,11 b) [mit (3,11 a)] und  $B$  bzw.  $b$  durch (3,16) (mit  $s$  an Stelle von  $l_0$ ) gegeben. In Tab. 2 sind die Zahlenwerte  $x_c^2/(\chi_c'^2 s)$  und  $b_x - b$  für die Merkmale  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\omega$  und  $\bar{\omega}$  — entsprechend unseren Fällen Ia bis IIb — angegeben. Dabei ist angenommen (wie auch im folgenden durchweg in dieser Arbeit), daß der Energieverlust vernachlässigbar, also  $\chi_c'$  und  $\chi_a$  in (5,2a und b) als Konstante zu betrachten sind,

<sup>13</sup> Anm. b. d. Korr.: Der leider früh verstorbene Rochat hat Verf. darauf hingewiesen (briefliche Mitteilung 1951), daß die praktische „sagitta“-Methode nach Fowler<sup>7</sup> einem intermediären Fall zwischen unseren IIa und IIb — wir bezeichnen ihn im folgenden kurz als IIc — entspricht, insofern dabei die zur Bestimmung der Schwerpunkts-Koordinaten dem Bahnverlauf (visuell) angepaßten Geraden nicht — wie es IIb entsprechen würde — an die Gesamtheit der geschwärzten Körner je einer Zelle angepaßt werden, sondern nur an die Körner innerhalb eines kleineren „Anpassungs-Bereiches“, d. h. einer gewissen näheren Umgebung des jeweiligen Bahn-Punktes, auf den die betreffende Schwerpunkts-Koordinate bezogen wird. Während die Abstände benachbarter solcher Bahn-Punkte unsere Zell-Länge  $s$  darstellen, sei  $c$  die Länge des Anpassungs-Bereiches und  $\kappa = c/s$  das Verhältnis dieser beiden Längen.

Mit Rochat nehmen wir an, daß die Körner (bzw. der Bahnverlauf) innerhalb des Anpassungs-Bereiches gleichmäßig (d. h. unabhängig von ihrer speziellen

Lage in demselben) zur Anpassung beitragen. (Die Verwendung einer stetig gegen Null abfallenden Gewichtsfunktion dürfte demgegenüber keine wesentliche Verbesserung bedeuten.) Die daraus folgende Modifikation der Behandlung des Falles IIb läßt sich durch eine Änderung der Integrations-Grenzen in den Gln. (4,4), (4,6) und (4,10) ausdrücken, und zwar ist (in jeder dieser drei Gln.)  $(i + 1/2 - \kappa/2)s$  als untere und  $(i + 1/2 + \kappa/2)s$  als obere Grenze einzusetzen. Hieraus folgt eine entsprechende Änderung der Integrations-Grenzen in Gl. (4,13) für den Kopplungs-Faktor. Zum Ergebnis für diesen bemerken wir hier nur, daß sein Verlauf als Funktion der Bahn-Länge im Fall IIc intermediär zwischen dem in Abb. 3 für IIa und IIb dargestellten liegt und in den Grenzfällen  $\kappa \rightarrow 0$  bzw.  $\kappa \rightarrow 1$  in denjenigen für den ersten bzw. letzteren dieser Fälle übergeht.

Die für die Praxis wesentlichen Ergebnisse für diesen „intermediären Fall IIc“ werden weiter unten<sup>14, 15</sup> mitgeteilt und mit den entsprechenden Ergebnissen für die anderen Fälle verglichen.



und es ist dort  $a(l)$  nach unseren Ergebnissen des § 4 für die verschiedenen Fälle eingesetzt.

$x$	$\alpha$	$\bar{\alpha}$	$\omega$	$\bar{\omega}$
$x_c^2/\chi_c'^2 s \equiv A$	1	26/35	2/3	11/20
$b_x - b$	0	-0,115	-0,261	-0,443

Tab. 2.

Die statistische Kopplung zwischen den Merkmalen  $x_i$  einer Bahnspur wird in den folgenden Paragraphen behandelt werden, wo wir die mehrdimensionalen Verteilungsfunktionen der  $x_i$  untersuchen werden. Einen Einblick in die Korrelation benachbarter  $x_i$  kann man aber auch bereits aus eindimensionalen Verteilungsfunktionen gewinnen, wenn man für  $x$  geeignete Linearkombinationen benachbarter Merkmale nimmt. In Tab. 3 und 4 sind die für  $x = x_i \pm x_{i+1}$  maßgeblichen Zahlenwerte zusammengestellt:

$x$	$\alpha_1 + \alpha_2$	$\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$	$\omega_1 + \omega_2$	$\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$
$x_c^2/\chi_c'^2 s$	2	61/35	5/3	23/15
$b_x - b$	-0,693	-0,748	-0,777	-0,830

Tab. 3.

$x$	$\alpha_1 - \alpha_2$	$\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2$	$\omega_1 - \omega_2$	$\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2$
$x_c^2/\chi_c'^2 s$	2	43/35	1	2/3
$b_x - b$	-0,693	-0,644	-0,667	-0,852

Tab. 4.

[Bei der Berechnung der Tab. 3 und 4 wurde benutzt, daß die Kopplungsfaktoren zusammengesetzter Merkmale in entsprechender Weise linear zusammenzusetzen sind, wie diese Merkmale selbst, hier also gemäß  $a(l) = a_i(l) \pm a_{i+1}(l)$ .]

Zur Diskussion der Tab. 2 bis 4 gehen wir zweckmäßig vom Mittelwert  $\langle x \rangle$  des jeweiligen Merkmals  $x$  aus, für welchen durch Übertragung der Gl. (10,4) des Teils II auf unseren allgemeineren Fall folgt:

$$\langle x \rangle = \frac{x_c \sqrt{B_x}}{\sqrt{\pi}} \left[ 1 + \frac{0,982}{B_x} - \frac{0,117}{B_x^2} + \dots \right]. \quad (5,3)$$

Dieser Mittelwert ist [wie auch die vollständige Verteilungsfunktion (3,13) mit (3,14)] durch die beiden Konstanten  $x_c$  und  $B_x$  bestimmt, die mit Hilfe der Tab. 2 bis 4 aus den beiden Größen  $\chi_c'$  und  $\chi_a$  [vgl. Gl. (E, 2) und (E, 1)] zusammen mit der Zellenlänge  $s$  zu ermitteln sind. Die Größe  $B_x$  ergibt sich dabei als die größere der beiden Lösungen der Gleichung

$$B_x - \log B_x = b_x, \quad (5,4)$$

wobei  $b_x$  durch Hinzufügen der in der 3. Tabellenzeile angegebenen Differenz  $b_x - b$  zu

$$b = \log(e \chi_c'^2 s / \chi_a^2) \quad (5,5)$$

folgt. Die den verschiedenen Merkmalen  $x$  — entsprechend den verschiedenen Tabellen-Spalten — zugehörigen  $B_x$  werden sich im allgemeinen nur wenig voneinander unterscheiden, und es wird daher meistens genügen, sie durch die gemeinsame Größe  $B$  (gemäß  $B - \log B = b$ ) zu ersetzen. Der Mittelwert  $\langle x \rangle$  nach (5,3) unterscheidet sich dann für die verschiedenen Merkmale  $x$  nur noch durch den Faktor  $x_c$ , dessen Quadrat durch  $\chi_c'^2 s$ , multipliziert mit dem in der zweiten Tabellen-Zeile angegebenen Zahlfaktor, gegeben ist.

„Ausglättung“ („smoothing“). Die Quadratwurzel aus dem Zahlfaktor in der 2. Tabellen-Zeile resp. in der 2., 3., 4. Spalte im Vergleich zur ersten Spalte gibt daher die Verkleinerung des Mittelwertes  $\langle x \rangle$  an, die darauf beruht, daß die Bahntangenten resp. durch „beste Gerade“, Sehnen, „Schwerpunkt-Verbindungs-Gerade“ ersetzt werden. Nach Goldschmidt<sup>4,6</sup> bezeichnen wir diesen Einfluß als „Ausglättung“ („smoothing“) und den entsprechenden Verkleinerungsfaktor für den Mittelwert als „Ausglättungsfaktor“. Speziell ist also der Ausglättungsfaktor für den Winkel  $\bar{\alpha}$  zwischen benachbarten „besten Geraden“ nach Tab. 2, Spalte 2:  $\langle \bar{\alpha} \rangle / \langle \alpha \rangle = \sqrt{26/35}$ . Dies ist jedoch nicht der bei Goldschmidt u. Mitarbb. betrachtete smoothing factor, vielmehr bezieht sich dieser auf den Winkel zwischen besten Geraden der ersten, dritten, fünften Zelle usw., d. h. unter Übersprungung jeweils einer Zelle. (Unsere Zell-Länge  $s$  ist mit der Goldschmidtschen „Halb-Zell-Länge“  $t/2$  identisch.) Die von Goldschmidt u. Mitarbb. verwendeten Merkmale sind also unsere  $\bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_{i+1} = \bar{\beta}_{i+1} - \bar{\beta}_{i-1}$ . Für den Goldschmidtschen smoothing factor entnehmen wir daher unserer Tab. 3 (Wurzel aus dem Verhältnis des in der zweiten zu dem in der ersten Spalte in der zweiten Zeile der Tab. 3 angegebenen Zahlfaktors) den Zahlenwert  $\sqrt{61/70} = 0,934$ , der eine Präzisierung des bei Goldschmidt<sup>4</sup> geschätzten Wertes  $0,96 \pm 0,02$  darstellt.

Statistische Kopplung: Die zwischen Merkmalen  $x_i$  und  $x_{i+1}$  benachbarter Zellen bestehende Korrelation hat für die Mittelwerte die Ungleichung zur Folge:  $\langle x_{i+1} + x_i \rangle^2 > 2 \langle x_i \rangle^2 > \langle x_{i+1} - x_i \rangle^2$ . In der Näherung, in der die verschiedenen  $B_x$  durch die gemeinsame Größe  $B$  ersetzt werden können, über-

trägt sich diese Ungleichung von den Mittelwerten auf die  $x_c$ , und man hat so z. B. für die Winkel zwischen besten Geraden (zweite Spalte der Tab. 2, 3 und 4):  $61/35 > 52/35 > 43/35$  und ähnlich für die anderen Merkmale. — In den folgenden Paragraphen werden wir die statistische Kopplung ausführlicher auf Grund mehrdimensionaler Verteilungsfunktionen behandeln, und gehen daher hier nicht näher darauf ein.

An einer späteren Stelle dieser Arbeit (vgl. § 9) wird gezeigt, daß die Verteilungsfunktion für das einzelne Merkmal auch dann (abgesehen von extrem kleiner Wahl der Zell-Länge  $s$ ) die Gestalt (3,13) beibehält, wenn die sogenannte „unechte Streuung“ (spurious scattering) mit berücksichtigt wird.

## § 6. Die mehrdimensionalen Verteilungsfunktionen der Streuungs-Merkmale

Wir wenden uns jetzt dem eigentlichen Ziel unserer Arbeit: der Auswertung der  $n$ -dimensionalen Verteilungsfunktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  der die Streuung charakterisierenden Merkmale  $x_i$  zu. Die  $x_i$  sollen die nicht-willkürlichen Merkmale der in der Einleitung aufgezählten Fälle Ia bis IIb, also resp. die Größen  $\alpha_i, \bar{\alpha}_i, \omega_i, \bar{\omega}_i$  bedeuten. Die Anzahl der  $x_i$  sei  $n$ ; die Anzahl der Zellen ist also  $=n$  im Fall Ia,  $=n+1$  in den Fällen Ib und IIa und  $=n+2$  im Fall IIb zu wählen. Wir führen nun [ähnlich wie (3,16)] die auf die Zell-Länge  $s$  bezogene Größe  $B$  ein gemäß:

$$B - \log B = \log(e \chi_c'^2 s / \gamma^2 \chi_a^2) \quad (6,1)$$

und ersetzen in (1,5) und (2,10) die Variablen  $\xi_i$  durch neue  $\eta_i$  gemäß:

$$\eta_i = \xi_i \chi_c' \sqrt{sB}. \quad (6,2)$$

Die Gl. (2,10) nimmt dabei — indem wir zugleich  $\zeta = l/s$  als Maß für die Weglänge einführen — die Gestalt an:

$$\Omega(\eta_1, \dots, \eta_n) - \Omega_0 = - \int d\zeta \frac{(\sum a_i(\zeta) \eta_i)^2}{4} \left[ 1 - \frac{1}{B} \log \frac{(\sum a_i(\zeta) \eta_i)^2}{4} \right], \quad (6,3)$$

wobei die Integration über die gesamte Länge der Spur zu erstrecken ist. Ähnlich wie früher denken wir uns nun wieder eine Entwicklung nach Potenzen von  $1/B$  ausgeführt, wollen uns dabei jedoch für das folgende auf das erste (absolute) Glied dieser Entwicklung beschränken, was also auf Streichung des  $1/B$  proportionalen Gliedes in (6,3) hinausläuft. Für die Ausführung der Integration

über  $\zeta$  kommt es dann nur noch auf die Produkte  $a_i(\zeta) a_k(\zeta)$  an, und wir können setzen:

$$A_{ik} = \int d\zeta a_i(\zeta) a_k(\zeta). \quad (6,4)$$

Gl. (6,3) nimmt damit die einfache Gestalt einer quadratischen Form an:

$$\Omega(\eta_1, \dots, \eta_n) - \Omega_0 = - \frac{1}{4} \sum_i \sum_k A_{ik} \eta_i \eta_k, \quad (6,5)$$

wobei sich die Summationen von 1 bis  $n$  erstrecken. Die Fourier-Darstellung der gesuchten Verteilungsfunktion wird damit [unter Beachtung von (6,2)]\*\*:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (2\pi \chi_c' \sqrt{sB})^{-n} \int \dots \int d\eta_1 \dots d\eta_n \cdot \exp \left[ i \sum_i \frac{\eta_i x_i}{\chi_c' \sqrt{sB}} - \frac{1}{4} \sum_{ik} A_{ik} \eta_i \eta_k \right]. \quad (6,6)$$

Die numerische Bestimmung der  $A_{ik}$  für die verschiedenen Fälle wollen wir auf nachher verschieben und hier nur vorweg bemerken, daß die  $A_{ik} = A_{ki}$  eine symmetrische Matrix bilden. Zur weiteren Umformung von (6,6) denken wir uns nun in dem  $n$ -dimensionalen Raum der  $\eta_i$  und zugleich der  $x_i$  eine orthogonale Transformation ausgeführt, und zwar so, daß die Matrix  $A_{ik}$  (die in diesem Raum einen Tensor zweiter Stufe bildet) auf Diagonalform gebracht wird. Die aus der Transformation hervorgehenden neuen Variablen seien mit  $\hat{\eta}_i$  bzw.  $\hat{x}_i$  und die zugehörigen Hauptwerte von  $A_{ik}$  mit  $\hat{A}_i$  bezeichnet. Die Transformation läßt  $\sum \eta_i x_i = \sum \hat{\eta}_i \hat{x}_i$  invariant und überführt die quadratische Form  $\sum \sum A_{ik} \eta_i \eta_k$  in die einfache Summe  $\sum \hat{A}_i \hat{\eta}_i^2$ . Das  $n$ -fache Fourier-Integral in (6,6) geht damit über in ein Produkt von  $n$  einfachen Fourier-Integralen, die auf Gauß-Funktionen führen. Die aus (6,6) hervorgehende Verteilungsfunktion für die neuen Variablen  $\hat{x}_i$  lautet damit:

$$f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = [(\pi \chi_c'^2 s B)^n \prod_{i=1}^n \hat{A}_i]^{-1/2} \cdot \exp \left[ - \sum_{k=1}^n \hat{x}_k^2 / (\hat{A}_k \chi_c'^2 s B) \right]. \quad (6,6')$$

Wir bemerken nun, daß in dem speziellen  $\wedge$ -Koordinatensystem das Produkt  $\hat{A}_i$  die Determinante  $\text{Det}(A_{ik})$  und die Größen  $1/\hat{A}_i$  die Hauptwerte der zu  $A_{ik}$  reziproken Matrix  $A_{ik}^{-1}$  darstellen. Führen wir daher jetzt die zu der obigen inverse orthogonale Transformation aus, so folgt aus (6,6') für die

\*\* Eine Verwechslung des Index  $i$  mit der imaginären Einheit im Exponenten in (6,6) ist nicht zu befürchten.

Verteilungsfunktion in den ursprünglichen Variablen  $x_i$ :

$$f(x_1, \dots, x_n) = [(\pi \chi_c'^2 B)^n \cdot \text{Det}]^{-1/2} \quad (6,7) \\ \cdot \exp \left[ - \sum_i \sum_k A_{ik}^{-1} x_i x_k / (\chi_c'^2 B) \right].$$

Um diese Verteilungsfunktion in den speziellen Fällen zu kennen, genügt es also, die Determinante  $\text{Det}$  der Matrix  $A_{ik}$  und deren Reziproke  $A_{ik}^{-1}$  zu ermitteln, und es erübrigt sich, die obige Hauptachsentransformation tatsächlich auszuführen. Gl. (6,7) ist der allgemeine Ausdruck für die gesuchte  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion in „Gaußscher“ oder „normaler“ Näherung, d. h. unter Vernachlässigung des Einfachstreuungs-Schwanzes, jedoch unter exakter Berücksichtigung der zwischen den  $n$  Merkmalen bestehenden statistischen Kopplung.

### § 7. Spezielle Auswertung der Kopplungsmatrix $A_{ik}$

Um das Ergebnis (6,7) für die  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion praktisch anwenden zu können, muß nun zunächst die Matrix  $A_{ik}$  nach (6,4) auf Grund der Ergebnisse des § 4 für die Kopplungsfaktoren  $a_i(\zeta)$  für die verschiedenen Fälle berechnet werden, wobei wir uns zunächst den Fällen Ia bis IIb zuwenden. In diesen Fällen sind die  $n$  Merkmale  $x_i$  und damit die  $a_i(\zeta)$  alle von der gleichen Art und gehen durch eine Translation um eine ganze Anzahl von Zell-Längen auseinander hervor. Daraus folgt nach (6,4), daß die Matrixelemente  $A_{ik}$  nur von der Differenz  $k-i$  abhängen, d. h. es ist  $A_{11} = A_{22} = \dots$ ,  $A_{12} = A_{23} = \dots$ ,  $A_{13} = A_{24} = \dots$  usw. Ferner zeigt ein Blick auf Abb. 3, daß jede der Funktionen  $a_i(\zeta)$  symmetrisch in bezug auf ein Spiegelungszentrum verläuft, woraus nach (6,4) folgt, daß  $A_{ik} = A_{ki}$  eine symmetrische Matrix ist. Es genügt also, für jeden der Fälle Ia bis IIb die Matrixelemente  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{13}$  usw. zu berechnen. Das Ergebnis dieser elementaren Rechnungen auf Grund der im § 4 abgeleiteten  $a_i(\zeta)$  ist in Tab. 5 zusammengestellt<sup>14</sup>.

<sup>14</sup> Anm. b. d. Korr.: Für den der Fowlerschen „sagitta“-Methode<sup>7</sup> entsprechenden „intermediären Fall IIc“<sup>13</sup> ergeben sich für die  $A_{ik}$  als Funktionen des Verhältnisses  $\kappa$  der „Anpassungs-Länge“ zur Zell-Länge die folgenden Ausdrücke:

$$A_{11} = 2/3 - \kappa^2/6 + \kappa^3/20 \\ A_{12} = 1/6 + \kappa^2/12 - \kappa^3/30 \\ A_{13} = \kappa^3/120.$$

Fall	I a	I b	II a	II b
$x_i$	$\alpha_i$	$\bar{\alpha}_i$	$\omega_i$	$\bar{\omega}_i$
$A_{11}$	1	26/35	2/3	11/20
$A_{12}$	0	9/70	1/6	13/60
$A_{13}$	0	0	0	1/120

Tab. 5.

Wir kommen nun zum Fall IIIa, bei dem die Größen  $\alpha_i$  und  $\omega_i$ , bzw. zum Fall IIIb, bei dem die  $\bar{\alpha}_i$  und  $\bar{\omega}_i$  *gemeinsam* als Merkmale verwendet werden sollen. Der deutlichen Unterscheidung halber wollen wir die auf die Größen  $\omega$  bzw.  $\bar{\omega}$  bezüglichen Indizes durch Unterstreichungen kennzeichnen, also im folgenden schreiben:  $\omega_i$  bzw.  $\bar{\omega}_i$ , während die Bezeichnung der  $\alpha_i$  bzw.  $\bar{\alpha}_i$  unverändert bleiben soll. Wir wollen uns die Bedeutung und wechselseitige Beziehung der verschiedenen Größen nochmals deutlich machen: Im Fall IIIa sind die  $n$  Größen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  die Winkel zwischen Anfangs- und Endtangente der ersten, zweiten . . .  $n$ -ten Zelle. Zu diesen treten die  $n-1$  Größen  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ , die die Winkel zwischen den Sehnen der ersten und zweiten, der zweiten und dritten, . . . der  $(n-1)$ -ten und  $n$ -ten Zelle bedeuten. Entsprechend sind im Fall IIIb die  $\bar{\alpha}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) die Winkel zwischen der  $i$ -ten und  $(i+1)$ -ten „besten Geraden“ und die  $\bar{\omega}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) die Winkel zwischen den Verbindungsgeraden des ersten und zweiten und des zweiten und dritten Zellen-Schwerpunkts usw. — Die Matrixelemente mit einheitlichen Indizes:  $A_{ik}$  und  $A_{\bar{i}\bar{k}}$  sind bereits in der Tab. 5 enthalten. Hinzu treten jetzt noch die gemischten Matrixelemente  $A_{i\bar{k}} = A_{\bar{k}i}$ , die nach (6,4) auf Grund der Kopplungsfaktoren  $a_i(\zeta)$  und  $a_{\bar{k}}(\zeta)$  zu bestimmen sind. In Tab. 6 und 7 sind die ersten Zeilen und Spalten der Kopplungsmatrix (so wollen wir die Matrix  $A_{ik}$  im folgenden nennen!) aufgeschrieben (wobei die freigelassenen Plätze mit Nullen ausgefüllt zu denken sind).

Damit kennen wir die Kopplungsmatrix  $A_{ik}$  für alle uns hier interessierenden Fälle. — Als eine für

Diese Ausdrücke stellen bei gegebenem  $\kappa$  ( $< 1$ ) Zwischen-Werte der beiden Spalten IIa und IIb in Tab. 5 dar und gehen in den Grenzfällen  $\kappa \rightarrow 0$  bzw.  $\kappa \rightarrow 1$  in diese über. — Im allgemeinen dürfte es eine ausreichende Näherung darstellen, die zu  $\kappa^3$  proportionalen Glieder zu vernachlässigen. Damit verschwindet insbesondere  $A_{13}$ , und die Kopplungsmatrix geht in den einfacheren Typ der Fälle Ib und IIa über, womit sich die Auswertung wesentlich vereinfacht (§§ 8, 13 u. 14). Über die unechte Streuung im Fall IIc, vgl. <sup>15</sup>.



	1	<u>1</u>	2	<u>2</u>	3	<u>3</u>	4
1	1	1/2					
<u>1</u>	1/2	2/3	1/2	1/6			
2		1/2	1	1/2			
<u>2</u>		1/6	1/2	2/3	1/2	1/6	
3				1/2	1	1/2	
<u>3</u>							

Tab. 6. Die Kopplungsmatrix in Fall III a.

das Folgende bequeme Vereinfachung führen wir noch die  $A_{ik}$  auf neue  $a_{ik}$  zurück, die so gewählt sind, daß die Diagonalelemente  $a_{ii}$  sämtlich = 1 sind, und die wir die „reduzierte Kopplungsmatrix“ nennen wollen. Bezeichnen wir mit  $A$  den gemeinsamen Wert der Diagonalelemente  $A_{ii}$  in einem der Fälle Ia bis IIb, so haben wir also zu setzen:

$$a_{ik} = A_{ik}/A. \quad (7,1)$$

Führen wir ferner zur Abkürzung die Bezeichnungen ein

$$D_n \equiv \text{Det } (a_{ik}) \quad (7,2)$$

für die Determinante von  $a_{ik}$  im Fall von  $n$ -Dimensionen und

$$x_0 \equiv x_c \sqrt{B} = \chi_c' \sqrt{sAB} \quad (7,3)$$

als geeignete Maßeinheit für die Merkmale  $x_i$  (vgl. Tab. 2), so nimmt die Verteilungsfunktion (6, 7) in den Fällen Ia bis IIb die einfache Gestalt an:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\pi x_0^2)^{-n/2} D_n^{-1/2} \cdot \exp \left[ - \sum_i \sum_k a_{ik}^{-1} x_i x_k / x_0^2 \right]. \quad (7,4)$$

	1	<u>1</u>	2	<u>2</u>	3	<u>3</u>	4	<u>4</u>	5	<u>5</u>	6
1	26/35	7/15	9/70	1/30							
<u>1</u>	7/15	11/20	7/15	13/60	1/30	1/120					
2	9/70	7/15	26/35	7/15	9/70	1/30					
<u>2</u>	1/30	13/60	7/15	11/20	7/15	13/60	1/30	1/120			
3	1/30	9/70	7/15	26/35	7/15	9/70	1/30				
<u>3</u>	1/120	1/30	13/60	7/15	11/20	7/15	13/60	1/30	1/120		
4											

Tab. 7. Die Kopplungsmatrix im Fall III b.

In ähnlicher Weise können wir auch in den Fällen IIIa und IIIb eine reduzierte Kopplungsmatrix einführen, bei der sowohl die Diagonalelemente  $a_{ii} = 1$  als auch diejenigen  $a_{\underline{i}\underline{i}} = 1$  sind. Der Deutlichkeit halber wollen wir mit  $i', k'$  Indizes bezeichnen, die alle  $2n-1$  Werte, also sowohl die Werte  $i, k = 1, 2, \dots, n$  als auch diejenigen  $\underline{i}, \underline{k} = \underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{n-1}$  durchlaufen. Die zwei Sorten von Diagonalelementen der Matrix  $(A_{i'k'})$  bezeichnen wir jetzt mit

$$A \equiv A_{ii} \text{ und } \underline{A} \equiv A_{\underline{i}\underline{i}} \quad (7,5)$$

und setzen in Verallgemeinerung von (7,1):

$$a_{ik} = A_{ik}/A, \quad \underline{a}_{\underline{i}\underline{k}} = A_{\underline{i}\underline{k}}/\underline{A} \quad (7,6)$$

und  $a_{ik} = a_{ki} = A_{ik}/(A\underline{A})^{1/2}.$

Die Determinante von  $(A_{i'k'})$  drückt sich dann gemäß

$$\text{Det } (A_{i'k'}) = A^n \underline{A}^{n-1} D_{2n-1} \quad (7,7)$$

durch die Determinante  $D_{2n-1}$  der Matrix  $(a_{i'k'})$  aus, und es gilt für die reziproke Matrix  $(A_{i'k'}^{-1})$ :

$$A_{ik}^{-1} = a_{ik}^{-1}/A, \quad \underline{A}_{\underline{i}\underline{k}}^{-1} = \underline{a}_{\underline{i}\underline{k}}^{-1}/\underline{A} \text{ und } A_{ik}^{-1} = a_{ik}^{-1}/(A\underline{A})^{1/2}. \quad (7,8)$$

Wir betrachten nun z. B. den Fall IIIa mit den Merkmalen  $\alpha_1, \omega_1, \alpha_2, \omega_2, \dots, \alpha_{n-1}, \omega_{n-1}, \alpha_n$ . Die  $(2n-1)$ -dimensionale Verteilungsfunktion dieser Merkmale läßt sich nach (6,7) mit Berücksichtigung von (7,7) und (7,8) und mit Benutzung der Einheiten  $x_0$  (d. h. hier  $\alpha_0$  und  $\omega_0$ ) nach (7,3) wie folgt anschreiben:

$$f(\alpha_i, \omega_i) = \pi^{-(2n-1)/2} \alpha_0^n \omega_0^{-(n-1)} \cdot \exp \left[ - \sum_{i'} \sum_{k'} a_{i'k'}^{-1} \frac{x_{i'}}{x_0} \frac{x_{k'}}{x_0} \right]. \quad (7,9)$$

Die Summen über  $i'$  und  $k'$  im Exponenten sind dabei über alle  $2n-1$  Indexwerte — die nicht unterstrichenen  $i$  und die unterstrichenen  $\underline{i}$  — zu erstrecken. Dabei ist für den Ausdruck  $x_{i'}/x_0$  unter den Summenzeichen respektive  $\alpha_i/\alpha_0$  und  $\omega_i/\omega_0$  einzusetzen, je nachdem, ob  $i'$  einen nicht unterstrichenen Wert  $i$  oder einen unterstrichenen Wert  $\underline{i}$  annimmt, und genau das entsprechende gilt für  $k'$ .

### § 8. Auswertung der Determinante und der Reziproken der Kopplungsmatrix

Zur praktischen Anwendung unserer Ergebnisse — insbesondere für die Verteilungsfunktion (7,4) bzw. (7,9) — ist es erforderlich, für die verschiedenen Fälle und für die jeweils vorliegende Dimensionszahl  $n$  die Determinante  $D_n = \text{Det } (a_{ik})$  und die Reziproke  $a_{ik}^{-1}$  der reduzierten Kopplungsmatrix  $a_{ik}$  zu kennen. Insbesondere wird es, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, zur Auswertung der Streuung einer speziellen Spur darauf ankommen, aus den an dieser Spur gemessenen Merkmalswerten  $x_1, \dots, x_n$  den Zahlenwert der im Exponenten von (7,4) auftretenden quadratischen Form:

$$Q \equiv \sum_i \sum_k a_{ik}^{-1} x_i x_k \quad (8,1)$$

zu ermitteln.

Nächst dem trivialen Fall Ia (in dem  $a_{ik}$  und damit auch  $a_{ik}^{-1}$  die Einheitsmatrix ist, womit (7,4) in ein Produkt von Gauß-Funktionen der  $x_i$  übergeht) sind die Fälle Ib und IIa am einfachsten. Die reduzierte Kopplungsmatrix ist in diesen Fällen von der Form:

$$(a_{ik}) = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & & & \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & & \\ & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \\ & & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ & & & \ddots & \ddots \end{vmatrix} \quad (8,2)$$

(die freien Plätze sind wie stets mit Nullen zu ergänzen).  $(a_{ik})$  hängt also nur von dem einzigen Parameter  $\varepsilon = a_{12} = A_{12}/A$  ab, der im Fall IIa bzw. Ib den Wert  $1/4$  bzw.  $9/52$  hat. Indem wir den Wert von  $\varepsilon$  zunächst offen lassen, können wir beide Fälle gemeinsam behandeln. — Wir beginnen mit den Determinanten  $D_n = D_n(\varepsilon)$  für die verschiedenen Dimensionszahlen  $n$ . Offenbar ist  $D_1 = 1$ , und es ist für das folgende bequem, zur Ergänzung die Größe

$$D_0 \equiv 1 \quad (8,3)$$

einzuführen. Für alle anderen Dimensionszahlen kann man dann  $D_n$  auf Grund der Rekursionsformel

$$D_n = D_{n-1} - \varepsilon^2 D_{n-2} \quad (8,4)$$

bestimmen. Daneben kann auch die explizite Formel

$$D_n = 1 - \binom{n-1}{n} \varepsilon^2 + \binom{n-2}{2} \varepsilon^4 - \binom{n-3}{3} \varepsilon^6 + \dots \quad (8,5)$$

verwendet werden. — Es ist nun in den Fällen Ib und IIa besonders bequem, daß die reziproke Matrix  $a_{ik}^{-1}$  durch Determinanten der Art (8,4) ausgedrückt werden kann. Betrachten wir, um dies zu zeigen, ein bestimmtes Matrixelement  $a_{ik}^{-1}$ , wobei wir annehmen wollen, daß  $k \geq i$  ist.

Das Matrixelement  $a_{ik}^{-1}$  ist nun gleich  $(-1)^{k-i}/D_n$  mal der durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte aus (8,2) entstehenden Unterdeterminante. Die letztere zerfällt offenbar in ein Produkt von drei Determinanten, die resp. die Werte  $D_{i-1}$ ,  $\varepsilon^{k-i}$  und  $D_{n-k}$  haben, d. h. wir erhalten (zugleich unter Berücksichtigung der Symmetrie):

$$a_{ik}^{-1} = a_{ki}^{-1} = (-\varepsilon)^{k-i} D_{i-1} D_{n-k} / D_n. \quad (8,6)$$

Die einfache Gestalt der Matrix (8,6) kann verwendet werden, um aus gegebenen (gemessenen) Zahlenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  den zugehörigen Wert der quadratischen Form (8,1) in bequemer Weise zu berechnen. Dazu bilde man aus den  $x_i$  und der

Folge der Determinanten  $D$  zwei neue Zahlenreihen:

$$u_i = D_{i-1} x_i = D_0 x_1, D_1 x_2, \dots, D_{n-1} x_n \quad (8,7a)$$

und

$$v_i = D_{n-i} x_i = D_{n-1} x_1, D_{n-2} x_2, \dots, D_0 x_n, \quad (8,7b)$$

wobei die Zusatzdefinition (8,3) mitverwendet ist. Daraus kann dann wie folgt bequem berechnet werden:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{D_n} [(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n) \\ &\quad - 2\varepsilon (u_1 v_2 + u_2 v_3 + \dots + u_{n-1} v_n) \\ &\quad + 2\varepsilon^2 (u_1 v_3 + u_2 v_4 + \dots + u_{n-2} v_n) \\ &\quad - \dots + 2(-\varepsilon)^{n-1} u_1 v_n]. \end{aligned} \quad (8,8)$$

Es genügt somit, die Reihe der Zahlen  $D_n$  nach (8,4) bzw. (8,5) zu tabulieren, und es erübrigt sich, ausführliche Tabellen der  $a_{ik}^{-1}$  für alle Dimensionszahlen  $n$  aufzustellen. — Die Tabelle der  $D_n$  wird im Anhang gegeben, und zwar für verschiedene Werte von  $\varepsilon$ , womit im Fall Ib auch die „unechte Streuung“ berücksichtigt werden kann (vgl. hierzu § 13).

Weniger bequem liegen die Dinge im Fall IIb. Die Matrix  $a_{ik}$  hat in diesem Fall die Gestalt:

$$(a_{ik}) = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \delta & & & \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \delta & & \\ \delta & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \delta & \\ & \delta & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \delta \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}. \quad (8,9)$$

Dabei ist (sofern nur die „echte“ Streuung berücksichtigt wird; vgl. § 9)  $\varepsilon = A_{12}/A = 13/33$  und  $\delta = A_{13}/A = 1/66$  gemäß Tab. 5. — Auch in diesem Falle ergibt sich für die aus  $a_{ik}$  zu bildende  $n$ -reihige Determinante  $\bar{D}_n$  [die wir zur Unterscheidung von der in (8,4) durch Überstreichung kennzeichnen] eine — im Vergleich zu (8,4) allerdings kompliziertere — Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \bar{D}_n &= \bar{D}_{n-1} - \varepsilon^2 \bar{D}_{n-2} + (2\varepsilon^2 \delta - \delta^2) \bar{D}_{n-3} \\ &\quad - (2\varepsilon^2 \delta^2 - \delta^4) \bar{D}_{n-4} \\ &\quad + 2\varepsilon^2 [\delta^3 \bar{D}_{n-5} - \delta^4 \bar{D}_{n-6} + \delta^5 \bar{D}_{n-7} - \dots]. \end{aligned} \quad (8,10)$$

Man gewinnt (8,10), indem man — ausgehend z. B. von der ersten Zeile in (8,9) — alle nicht verschwindenden Determinanten-Glieder aufsucht und soweit verfolgt, bis man jeweils auf eine Determinante der gleichen Art stößt. Das letzte Glied in (8,10), das noch mitberücksichtigt werden muß, ist das mit  $\bar{D}_0 = 1$ , entsprechend (8,3), d. h. wir haben als Zusatz-Definition zu (8,10) zu setzen:

$$\bar{D}_0 \equiv 1 \text{ und } \bar{D}_n \equiv 0 \text{ für } n < 0. \quad (8,11)$$

Um die zu (8,9) reziproke Matrix bequem ausdrücken zu können, führen wir zweierlei Hilfsgrößen ein, und zwar zunächst die Größen:

$$F_n = \bar{D}_n - \delta \bar{D}_{n-1} + \delta^2 \bar{D}_{n-2} - \delta^3 \bar{D}_{n-3} + \dots \quad (8,12)$$

oder auch

$$F_n = \bar{D}_n - \delta F_{n-1} \quad (8,13)$$

mit der Zusatz-Definition ähnlich (8,11)

$$F_0 = 1 \text{ und } F_n = 0 \text{ für } n < 0. \quad (8,14)$$

Nebenbei sei bemerkt, daß sich (8,10) mit Hilfe der  $F_n$  in die für die numerische Berechnung bequemere Form bringen läßt:

$$\bar{D}_n = \bar{D}_{n-1} - \varepsilon^2 \bar{D}_{n-2} - \delta^2 \bar{D}_{n-3} + \delta^4 \bar{D}_{n-4} + 2\varepsilon^2 \delta F_{n-4}. \quad (8,15)$$

Die Bedeutung der  $F_n$  ist die, daß  $\varepsilon F_{n-2}$  die durch Streichen der ersten Zeile und zweiten Spalte der Determinante von (8,9) entstehende Unterdeterminante ist. — Die zweite Art von Hilfsgrößen, die wir benötigen werden, ist gegeben durch die Rekursionsformel

$$\Delta_n = \varepsilon \Delta_{n-1} - \delta \Delta_{n-2} + \varepsilon \delta^2 \Delta_{n-3} - \delta^4 \Delta_{n-4}, \quad (8,16)$$

wiederum mit der Zusatz-Definition

$$\Delta_0 = 1 \text{ und } \Delta_n = 0 \text{ für } n < 0. \quad (8,17)$$

Dabei bedeutet  $\Delta_n$  die Determinante derjenigen  $n$ -reihigen Matrix, die aus der  $(n+1)$ -reihigen Matrix der Gestalt (8,9) durch Streichen der ersten Zeile und der letzten Spalte entsteht. — Mit Hilfe der Größen  $\bar{D}_n$ ,  $F_n$  und  $\Delta_n$  läßt sich nun die zu (8,9) reziproke Matrix ausdrücken, wobei sich für deren diagonale und nichtdiagonale Elemente verschiedene Ausdrücke ergeben, und zwar erhält man für die ersteren:

$$a_{ii}^{-1} = \frac{1}{\bar{D}_n} [\bar{D}_{i-1} \bar{D}_{n-i} - \delta^2 \bar{D}_{i-2} \bar{D}_{n-i-1}]. \quad (8,18a)$$

Für die nichtdiagonalen Elemente gilt, wenn man  $k > i$  annimmt:

$$\begin{aligned} a_{ik}^{-1} = a_{ki}^{-1} = [(-1)^{k-i} / \bar{D}_n] \{ & \Delta_{k-i} \bar{D}_{i-1} \bar{D}_{n-k} \\ & - \varepsilon \delta \Delta_{k-i-1} [\bar{D}_{i-1} F_{n-k-1} + F_{i-2} \bar{D}_{n-k}] \\ & + \delta^3 \Delta_{k-i-2} [\bar{D}_{i-1} \bar{D}_{n-k-1} + \bar{D}_{i-2} \bar{D}_{n-k}] \\ & + \varepsilon^2 \delta^2 \Delta_{k-i-2} F_{i-2} F_{n-k-1} \\ & - \varepsilon \delta^4 \Delta_{k-i-3} [F_{i-2} \bar{D}_{n-k-1} + \bar{D}_{i-2} F_{n-k-1}] \\ & + \delta^6 \Delta_{k-i-4} \bar{D}_{i-2} \bar{D}_{n-k-1} \}. \end{aligned} \quad (8,18b)$$

Es seien nun bei einer speziellen Spur  $n$  Merkmale  $x_i$  — d. h. in diesem Falle  $n$  Größen  $\bar{\omega}_i$  — durch Messung bestimmt worden, und es soll der zugehörige Wert von  $Q$  nach (8,1) ermittelt werden. Dies kann am einfachsten direkt nach (8,1) geschehen, sofern für die betreffende Dimensionszahl  $n$  die Matricelemente  $a_{ik}^{-1}$  tabuliert vorliegen. Zweckmäßig wird man jedoch diese Tabulierung, die auf Grund der Formeln (8,18) zu geschehen hat, nur für nicht allzugroße Dimensionszahlen  $n$  ausführen; denn für jedes  $n$  erfordert dies die Berechnung und Tabulierung von  $n(n+1)/2$  Koeffizienten  $a_{ik}^{-1}$ , und der Umfang der erforderlichen Tabellen würde daher mit wachsendem  $n$  sehr rasch zunehmen. Man kann sich jedoch, ohne daß dadurch die Berechnung von  $Q$  wesentlich umständlicher wird, für größere Dimensionszahlen  $n$  darauf beschränken, die Größen  $\bar{D}_n$ ,  $F_n$  und  $\Delta_n$  (d. h. nur drei Zahlwerte für jedes  $n$ ) zu tabulieren. Die Berechnung von  $Q$  kann dann — in Verallgemeinerung des für die Fälle Ib und IIa entwickelten Verfahrens — folgendermaßen geschehen: Zunächst bilde man aus der Reihe der gegebenen (gemessenen)  $n$  Zahlen  $\bar{\omega}_i$  sechs neue Zahlen-Reihen wie folgt [vgl. (8,7)]:

$$u_i^{(1)} \equiv \bar{D}_{i-1} \bar{\omega}_i, \quad u_i^{(2)} \equiv F_{i-2} \bar{\omega}_i \quad \text{und} \quad u_i^{(3)} \equiv \bar{D}_{i-2} \bar{\omega}_i \quad (8,19a)$$

$$\text{sowie} \quad v_i^{(1)} \equiv \bar{D}_{n-i} \bar{\omega}_i, \quad v_i^{(2)} \equiv F_{n-i-1} \bar{\omega}_i \quad \text{und} \quad v_i^{(3)} \equiv \bar{D}_{n-i-1} \bar{\omega}_i. \quad (8,19b)$$

Sodann bilde man aus den Produkten je einer der Zahlen (8,19a) mit je einer der Zahlen (8,19b) die Summen

$$S_j^{(r;s)} \equiv \sum_{i=1}^{n-j} u_i^{(r)} v_{i+j}^{(s)} \quad (\text{mit } r, s = 1, 2, 3 \text{ und } j = 1, 2, 3, \dots, n-1). \quad (8,20)$$

Mit Hilfe dieser Summen läßt sich sodann die Größe  $Q$  verhältnismäßig einfach wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} Q = \frac{1}{\bar{D}_n} \{ & S_0^{(1;1)} - \delta^2 S_0^{(3;3)} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (\Delta_j S_j^{(1;1)} - \varepsilon \delta \Delta_{j-1} [S_j^{(1;2)} + S_j^{(2;1)}]) \\ & + \delta^3 \Delta_{j-2} [S_j^{(1;3)} + S_j^{(3;1)} + \frac{\varepsilon^2}{\delta} S_j^{(2;2)}] - \varepsilon \delta^4 \Delta_{j-3} [S_j^{(2;3)} + S_j^{(3;2)}] + \delta^6 \Delta_{j-4} S_j^{(3;3)} \} \}. \end{aligned} \quad (8,21)$$

Die Glieder in (8,21) werden im allgemeinen rasch abnehmen, so daß man die Entwicklung nach wenigen Gliedern abbrechen kann. — Die notwendigen Tabellen stehen im § 13.

Auf die Übertragung des geschilderten Verfahrens auch auf die Fälle IIIa und b müssen wir verzichten, da sie allzu umständlich würden. Praktisch jedoch dürften diese Fälle nur dann in Betracht kommen, wenn die Anzahl der verfügbaren Zellen klein ist (d. h. wenn die Spur entweder kurz ist, oder aber, wenn sie zwar lang aber von einem Teilchen sehr großer Energie erzeugt worden ist, so daß aus Gründen der „unechten Streuung“ eine geringe Anzahl großer Zellen verwendet werden muß). — Im Tabellen-Anhang sind die reziproken Kopplungsmatrizen für die Fälle IIIa und b für einige Dimensionszahlen  $n$  tabelliert.

### § 9. Unechte Streuung

(„spurious scattering“, „noise level“)

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt ausschließlich mit den „praktischen“ Fällen Ib, IIb und IIIb, bei denen „Ausglättung“ (smoothing) verwendet wird, darin bestehend, daß nicht Richtung und Koordinate der Bahn selbst, sondern Richtung und Koordinate der jeweils längs einer Zelle angepaßten „besten Gerade“ als Merkmale für die Streuung verwendet werden. Wir knüpfen an die Fälle Ib und IIb betreffenden Ausführungen des § 4 an, wonach die „beste Gerade“ entweder dem „wirklichen“ (tatsächlich aber unbekannten) Bahnverlauf („wirkliche beste Gerade“) oder den geschwärmten Körnern der Spur („praktische beste Gerade“) angepaßt sein kann. In der Abweichung der „praktischen“ von der „wirklichen“ besten Geraden besteht die sogenannte unechte Streuung, mit der wir uns jetzt näher beschäftigen wollen.

Wir wollen zur Vereinfachung zunächst annehmen, daß allein unechte Streuung und überhaupt keine echte Streuung vorliegt, d. h. wir setzen den Bahnverlauf als genau geradlinig voraus. Zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen wollen wir ferner die (unwesentliche) Annahme machen, daß die Bezugsgerade, auf die wir die Lage der geschwärmten Körner und der besten Geraden beziehen, mit der von dem Teilchen durchlaufenen Bahn zusammenfällt. Längs der Bahn sind nun geschwärmte Körner in statistischer Folge verteilt, so daß auf eine einmal gewählte Zell-Länge  $s$  im Mittel eine Anzahl von — sagen wir —  $N = s/d$

Körnern entfällt, wobei also  $d$  deren mittleren Abstand bedeutet. Wir wollen nun die für das Folgende *wesentliche* Voraussetzung machen, daß die Anzahl  $N$  der Körner pro Zelle groß genug ist, so daß wir von den statistischen Schwankungen ihres gegenseitigen Abstandes absehen können. Wir betrachten also die Körner als in genau gleichen Abständen  $d$  aufeinander folgend und wollen ferner annehmen, daß die Anordnung der Körner längs jeder Zelle (dies betrifft nicht die seitliche Verschiebung der Körner!) symmetrisch ist in bezug auf den Zellen-Mittelpunkt. — Ein einzelnes, herausgegriffenes geschwärmtes Korn wird nun im allgemeinen nicht mit seinem Mittelpunkt genau auf der Teilchen-Bahn liegen, sondern gegenüber dieser (infolge von Vorgängen in der photographischen Emulsion) eine mehr oder minder große seitliche Verschiebung  $y$  besitzen, für die wir eine normale Verteilung gemäß

$$f(y) dy = \frac{dy}{\delta \sqrt{\pi}} e^{-y^2/\delta^2} \quad (9,1)$$

ansetzen. ( $\delta^2$  ist das doppelte mittlere Quadrat von  $y$ .) Der Tatbestand (9,1) sei kurz dadurch charakterisiert, daß wir sagen, es bestehe „Normal-Verteilung ( $y; \delta^2$ )“. [Wir erinnern an die zwei bekannten Regeln: Aus ( $x; a^2$ ) folgt für die Verteilung der Größe  $kx$ , wobei  $k$  eine Konstante ist: ( $kx; k^2 a^2$ ); ferner folgt aus zwei unabhängigen Normal-Verteilungen ( $x_1; a_1^2$ ) und ( $x_2; a_2^2$ ) für die Summe  $x_1 + x_2$  die Verteilung ( $x_1 + x_2; a_1^2 + a_2^2$ ).] — Wir haben nun die Überlegungen des § 4 betreffend die Anpassung der besten Geraden an den Bahnverlauf zu übertragen auf den jetzt betrachteten Fall der Anpassung einer besten Geraden an die  $N$  Körner einer Zelle. Der Unterschied gegenüber § 4 besteht nur darin, daß wir die dortigen Integrale über die Weglänge  $l$  durch Summen zu ersetzen haben. Damit lautet insbesondere die (4,4) entsprechende Bedingung für die bestmögliche Anpassung längs einer Zelle

$$\sum_{k=1}^N (\bar{y} + \bar{\beta} l_k - y_k)^2 = \text{Min.} \quad (9,2)$$

Dabei sind mit  $k=1, 2, \dots, N$  die Körner einer Zelle numeriert;  $l_k$  ist der vom Zellen-Mittelpunkt aus gerechnete Ort des  $k$ -ten Kornes und  $\bar{y}$  und  $\bar{\beta}$  sind wie früher die Parameter der besten Geraden. Durch Differentiation nach  $\bar{y}$  folgt aus (9,2) (unter Berücksichtigung der angenommenen Symmetrie in der Lage der Körner bezüglich des Zellen-Mittelpunktes):

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_k y_k \quad (9,3)$$

und durch Differentiation nach  $\bar{\beta}$ :

$$\bar{\beta} = \sum_k l_k y_k / \sum_{k'} l_{k'}^2. \quad (9,4)$$

Wir gehen nun davon aus, daß für jedes  $y_k$  Normal-Verteilung gilt entsprechend (9,1), d. h.:  $(y_k; \delta^2)$ . Daraus folgt nach den obigen Regeln:  $(\sum_k y_k; N\delta^2)$  und weiter:  $(\bar{y}; \delta^2/N)$  oder, indem wir  $N$  durch die Zell-Länge  $s$  und den Korn-Abstand  $d$  ausdrücken:

$$(\bar{y}; \delta^2 d/s). \quad (9,5)$$

In ähnlicher Weise schließen wir für (9,4) — wiederum auf Grund der beiden Regeln für Normal-Verteilungen:  $(l_k y_k; l_k^2 \delta^2)$ ; ferner  $(\sum_k l_k y_k; \delta^2 \sum_k l_k^2)$  und schließlich wegen (9,4):  $(\bar{\beta}; \delta^2 / \sum_k l_k^2)$ . Da wir die Anzahl  $N$  der Körner pro Zelle als nicht zu klein annehmen wollen, dürfen wir die Summe  $\sum_k l_k^2$  näherungsweise durch ein Integral ersetzen

$$\sum_k l_k^2 \rightarrow d^2 \int_{-N/2}^{+N/2} k^2 dk = \frac{s^3}{12d}.$$

Damit folgt für den Richtungswinkel  $\bar{\beta}$  der besten Geraden die Normal-Verteilung:

$$(\bar{\beta}; 12 \delta^2 d/s^3). \quad (9,6)$$

Wir betrachten jetzt eine Spur, die in  $n+1$  Zellen eingeteilt sei. Weiterhin nehmen wir an, daß die Teilchenbahn völlig gerade, also keine echte Streuung vorhanden sei. Wir denken uns ferner eine Bezugsgerade willkürlich gelegt, die jetzt nicht mehr mit der Teilchen-Bahn zusammenfallen, sondern mit dieser einen (kleinen) Winkel  $\beta_0$  einschließen soll. Die den Körnern der Spur in der ersten, zweiten, ...,  $(n+1)$ -ten Zelle angepaßten besten Geraden mögen mit der Bezugsgeraden die Winkel  $\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n$  bilden. Diese Winkel sind voneinander statistisch unabhängig; für jeden derselben gilt eine Gaußsche Verteilung entsprechend (9,6):  $(\bar{\beta}_i - \beta_0; 12 \delta^2 d/s^3)$  oder ausführlich:

$$[d \bar{\beta}_i / \sqrt{12 \pi \delta^2 d/s^3}] \exp[-(\bar{\beta}_i - \beta_0)^2 / (12 \delta^2 d/s^3)]. \quad (9,7)$$

Die  $(n+1)$ -dimensionale Verteilungsfunktion der Gesamtheit der  $\bar{\beta}_i$  ist somit das Produkt der  $n+1$  Ausdrücke (9,7) und kann unter Verwendung der Fourier-Darstellung der Gauß-Funktion folgendermaßen geschrieben werden:

$$g(\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n) = (2\pi)^{-(n+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int d^{n+1} \xi \exp \left[ i \sum_0^n \xi_i (\bar{\beta}_i - \beta_0) - \frac{D^2}{4} \sum_0^n \xi_i^2 \right]. \quad (9,8)$$

Dabei ist zur Abkürzung  $D^2 \equiv 12 \delta^2 d/s^3$  gesetzt, und es bedeutet  $d^{n+1} \xi = d\xi_0 d\xi_1 \dots d\xi_n$  das Volumenelement im  $(n+1)$ -dimensionalen Raum der  $\xi_i$ . — Nunmehr wollen wir von den  $\bar{\beta}_i$  bzw. den  $\bar{\beta}_i - \beta_0$  zu den Differenzen  $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i - \bar{\beta}_{i-1}$  übergehen; dabei wollen wir als eine nullte (überzählige) Variable zunächst noch  $\bar{\alpha}_0 = \bar{\beta}_0 - \beta_0$  mitführen, so daß die Anzahl der neuen Variablen zunächst wiederum  $n+1$  ist. Die lineare Transformation, die die  $(\bar{\beta}_i - \beta_0)$  in die  $\bar{\alpha}_i$  überführt, lautet dann — in Matrix-Form geschrieben:

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_0 \\ \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_3 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta}_0 - \beta_0 \\ \bar{\beta}_1 - \beta_0 \\ \bar{\beta}_2 - \beta_0 \\ \bar{\beta}_3 - \beta_0 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_n - \beta_0 \end{pmatrix}. \quad (9,9)$$

Die quadratische Matrix in (9,9) sei kurz mit  $\Delta$  und die beiden dort auftretenden ein-spaltigen Matrizen mit  $(\bar{\alpha})$  und  $(\bar{\beta} - \beta_0)$  bezeichnet, womit sich (9,9) kurz schreibt:  $(\bar{\alpha}) = \Delta (\bar{\beta} - \beta_0)$ . Daneben werden wir auch ein-zeilige Matrizen  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\beta} - \beta_0$  sowie

die zu  $\Delta$  transponierte Matrix  $\tilde{\Delta}$  verwenden, womit sich z. B. die zu (9,9) transponierte Gleichung schreibt:  $\bar{\alpha} = (\bar{\beta} - \beta_0) \tilde{\Delta}$ . In entsprechender Weise fassen wir auch die Variablen  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  zu einer einspaltigen bzw. ein-zeiligen Matrix  $(\xi)$  bzw.  $\bar{\xi}$  zusammen. Schließlich werden wir noch die zu  $\Delta$  reziproke Matrix  $\Delta^{-1}$  und deren transponierte  $\tilde{\Delta}^{-1}$  benötigen. [Die Elemente von  $\Delta^{-1}$  sind auf und unterhalb der Diagonalen jeweils Eins und oberhalb der Diagonalen jeweils Null. Übrigens sind die freien Plätze in (9,9) wie stets mit Nullen zu ergänzen.] Zugleich mit der Transformation (9,9) führen wir an Stelle der  $\xi_i$  neue Variable  $\eta_i$  ein durch die Transformation  $(\eta) = \tilde{\Delta}^{-1}(\xi)$  bzw.  $\bar{\eta} = \bar{\xi} \Delta^{-1}$  mit der Umkehrung  $(\xi) = \tilde{\Delta}(\eta)$  bzw.  $\bar{\xi} = \bar{\eta} \tilde{\Delta}$ . Diese Transformation ist so gewählt, daß sie das Skalarprodukt  $\sum \xi_i (\bar{\beta}_i - \beta_0) \equiv \bar{\xi} (\bar{\beta} - \beta_0)$  invariant läßt.

$$\bar{\xi} (\bar{\beta} - \beta_0) = \bar{\eta} \Delta \Delta^{-1} (\bar{\alpha}) = \bar{\eta} (\bar{\alpha}) \equiv \sum \bar{\alpha}_i \eta_i. \quad (9,10)$$



Wesentlich kommt es nun auf die Transformationsweise der im Exponenten von (9,8) auftretenden Quadratsumme  $\sum \xi_i^2$  an, für welche sich ergibt:

$$\sum_0^n \xi_i^2 \equiv \widehat{\xi}(\xi) = \widehat{\eta} \Delta \widetilde{\Delta}(\eta) \equiv \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n A'_{ik} \eta_i \eta_k, \quad (9,11)$$

wobei wir zur Abkürzung die Matrix  $(A'_{ik}) = \Delta \widetilde{\Delta}$  eingeführt haben, für die sich explizit ergibt:

$$(A'_{ik}) \equiv \Delta \widetilde{\Delta} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ & & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ & & & -1 & -\frac{1}{2} \\ & & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (9,12)$$

Damit haben wir die Verteilungsfunktion der  $n+1$  Variablen  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n$  in der Gestalt eines Fourier-Integrals ähnlich (9,8) erhalten, wobei im Exponenten die quadratische Form (9,11) auftritt. Zum Schluß müssen wir uns noch von der überzähligen Variablen  $\bar{\alpha}_0$  befreien, indem wir die  $(n+1)$ -dimensionale Verteilungsfunktion der  $\bar{\alpha}_i$  über die Variable  $\bar{\alpha}_0$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  integrieren. Nach der Bemerkung im § 1 kommt dies darauf hinaus, in der Fourier-Transformierten dieser Verteilungsfunktion die zugehörige Variable — hier also  $\eta_0$  — gleich Null zu setzen. Da diese Fourier-Transformierte eine Exponentialfunktion mit der in (9,11), rechte Seite, gegebenen quadratischen Form im Exponenten ist, können wir dies auch dadurch ausdrücken, daß wir die nullte Zeile und nullte Spalte der Matrix (9,12) (und damit gerade den Teil derselben, der ein unregelmäßiges Verhalten zeigt) zu streichen haben. Indem wir noch von dem Vorfaktor  $12\delta^2 d/s^3$  einen Faktor 12 zur Matrix hinüberziehen und also  $A_{ik}^{(u)} = 12 A'_{ik}$  (mit  $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) als die „Kopplungsmatrix für die unechte Streuung“ definieren, erhalten wir für diese in dem hier betrachteten Fall Ib:  $A_{11}^{(u)} = A_{22}^{(u)} = \dots = 24$ ,  $A_{12}^{(u)} = A_{23}^{(u)} = \dots = A_{21}^{(u)} = A_{32}^{(u)} = \dots = -12$  sowie  $A_{ik}^{(u)} = 0$  für  $|k-i| \geq 2$ . — Die Verteilungsfunktion für  $n$  Merkmale  $x_i$  (unter denen hier also die  $\bar{\alpha}_i$  zu verstehen sind) kann nun ganz allgemein als Fourier-Integral

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int d^n \xi e^{i \sum x_k \xi_k} e^{F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} \quad (9,13)$$

geschrieben werden, wobei, sofern (9,13) die auf der unechten Streuung allein beruhende Verteilungsfunktion bedeuten soll, im Exponenten

$$F(\xi_i) = F^{(u)}(\xi_i) \equiv -\frac{\delta^2 d/s^3}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(u)} \xi_i \xi_k \quad (9,14a)$$

einzusetzen ist. Soll dagegen (9,13) die echte Streuung allein beschreiben, so haben wir nach unseren früheren Ergebnissen, wobei jetzt  $A_{ik}^{(e)}$  statt früher  $A_{ik}$  die die echte Streuung allein betreffende Kopplungsmatrix bedeutet, im Exponenten in (9,13) einzusetzen:

$$F(\xi_i) = F^{(e)}(\xi_i) \equiv -\frac{\chi_c'^2 B s}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(e)} \xi_i \xi_k. \quad (9,14b)$$

Will man schließlich die kombinierte Wirkung der echten und der unechten Streuung berücksichtigen, so hat man für  $f(x_1, \dots, x_n)$  das Faltungsprodukt der entsprechenden Verteilungsfunktionen für die echte Streuung allein und für die unechte Streuung allein zu nehmen. (Man sieht dies leicht ein, indem man sich zunächst die Verteilungsfunktionen für die Koordinaten  $y_k$  der einzelnen geschwätzten Körner der Spur gegeben denkt und berücksichtigt, daß sich die Merkmale linear durch die  $y_k$  ausdrücken lassen.) Nach dem Faltungssatz ist dann  $f(x_1, \dots, x_n)$  wiederum von der Form (9,13), und zwar ist jetzt im Exponenten

$$F(\xi_i) = F^{(e)}(\xi_i) + F^{(u)}(\xi_i) \quad (9,14c)$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [\chi_c'^2 B s A_{ik}^{(e)} + (\delta^2 d/s^3) A_{ik}^{(u)}] \xi_i \xi_k$$

einzusetzen. — In Verallgemeinerung von (7,3) können wir jetzt als geeignete Maßeinheit der Merkmale  $x_i$  die Größe:

$$x_0 = [\chi_c'^2 B s A^{(e)} + (\delta^2 d/s^3) A^{(u)}]^{1/2} \quad (9,15)$$

eingeführen, wobei  $A^{(e)}$  und  $A^{(u)}$  die Diagonalelemente der respektiven Matrizen bedeuten. Ferner können wir in Verallgemeinerung von (7,1) die „reduzierte Kopplungsmatrix“

$$a_{ik} = [\chi_c'^2 B s A_{ik}^{(e)} + (\delta^2 d/s^3) A_{ik}^{(u)}] / x_0^2 \quad (9,16)$$

bilden, so daß ihre Diagonalelemente gleich Eins sind. — Der Exponent (9,14c) läßt sich mit (9,15) und (9,16) in die einfache Gestalt bringen:

$$F(\xi_i) = -\frac{x_0^2}{4} \sum_i \sum_k a_{ik} \xi_i \xi_k, \quad (9,14c')$$

die in (9,13) eingesetzt wiederum auf die bereits früher abgeleitete Formel (7,4) für die Verteilungsfunktion führt, die somit — bei entsprechend abgeänderter Bedeutung der darin auftretenden Konstanten — erhalten bleibt. Das gleiche gilt damit auch für die anschließenden Überlegungen im § 8.

Ausführlich haben wir die Mitberücksichtigung der unechten Streuung bisher nur für den Fall Ib behandelt, und müssen das Entsprechende nun auch für den Fall IIb nachholen, wobei wir uns kurz fassen können: Für diesen Fall denken wir uns die Spur in  $n+2$  Zellen eingeteilt. Die Verteilungsfunktion der Schwerpunktskoordinaten  $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n+1}$  ist jetzt ein  $(n+2)$ -faches Produkt von Gauß-Funktionen entsprechend (9,5), dessen Fourier-Darstellung der Gl. (9,8) ähnelt, und zwar tritt dabei als Exponent der Fourier-Transformierten der Ausdruck

$$-\frac{\delta^2 d/s}{4} \sum_{i=0}^{n+1} \xi_i^2 \quad (9,17)$$

auf. Von den  $\bar{y}_i$  müssen wir nun durch eine lineare Transformation zu den  $\bar{\omega}_i = (\bar{y}_{i-1} - 2\bar{y}_i + \bar{y}_{i+1})/s$  übergehen. Wir können dies unter Benutzung der in (9,12) gegebenen Matrix  $(A'_{ik})$  tun, indem wir setzen:

$$\bar{\omega}_i = -\frac{1}{s} \sum_k A'_{ik} \bar{y}_k, \quad (9,18)$$

wobei zunächst zwei überzählige Variable  $\bar{\omega}_0$  und  $\bar{\omega}_{n+1}$  mitgeführt sind, von denen wir uns nachher in bekannter Weise befreien werden. Die Rolle der Matrix  $A$  im Fall Ib wird also jetzt von der Matrix  $-(A'_{ik})/s$  übernommen. Damit können wir auch sogleich angeben, in welcher Weise sich beim Übergang von den alten Variablen  $\xi_i$  zu den neuen  $\eta_i$  die Quadrat-Summe in (9,17) transformiert. Setzen wir

$$\sum_{i=0}^{n+1} \xi_i^2 = \frac{1}{s^2} \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} A_{ik}^{(u)} \eta_i \eta_k, \quad (9,19)$$

so folgt nach Analogie von Fall Ib unmittelbar, daß wir zu setzen haben:

$$A_{ik}^{(u)} = \sum_j A'_{ij} A'_{jk} \equiv (A \tilde{A} A \tilde{A})_{ik}, \quad (9,20)$$

wonach sich explizit ergibt:

$$A_{ik}^{(u)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & & & & \\ -3 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & 1 & -4 & 6 \\ & & & & & 1 & -4 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (9,20')$$

<sup>15</sup> Anm. b. d. Korr.: Die Ableitung der Kopplungsmatrix für die unechte Streuung im Fall IIb überträgt sich fast wörtlich auf den „intermediären“ Fall IIc (vgl. <sup>13</sup> und <sup>14</sup>). Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Normalverteilung der Schwerpunktskoordinaten im Fall IIb:  $(\bar{y}; \delta^2/N)$  durch  $(\bar{y}, \delta^2/N')$  für IIc zu ersetzen ist, wobei an Stelle der Kornzahl  $N$  in der Zelle diejenige  $N'$  im Anpassungsbereich steht. Infolgedessen tritt zum Ausdruck (9, 17) und damit zur Kopp-

Die nullte und  $(n+1)$ -te (= letzte) Zeile und Spalte der Matrix (9,20) zeigen ein anomales Verhalten. Dies sind aber gerade diejenigen Zeilen und Spalten, die wir bei der Befreiung von den überzähligen Variablen zu streichen haben. Die verbleibende  $n$ -reihige quadratische Matrix  $A_{ik}^{(u)}$  ( $i, k=1, 2, \dots, n$ ) ist die gesuchte Kopplungsmatrix für die unechte Streuung im Fall IIb. Ihre Diagonalelemente haben alle den gleichen Wert 6, deren benachbarte Elemente den Wert  $-4$  und die nächst-folgenden den Wert 1, während alle übrigen verschwinden. Wir können damit unsere Ergebnisse — ähnlich der Tab. 5 — zusammenfassen in Tab. 8<sup>15</sup>.

	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{13}$
Fall I b	24	- 12	0
Fall II b	6	- 4	1

Tab. 8.

Damit überträgt sich auch alles weitere auf den Fall IIb, und insbesondere bleibt mit Benutzung von (9,15) und (9,16) die Formel (7,4) für die Verteilungsfunktion der Merkmale infolge der kombinierten Wirkung der echten und unechten Streuung gültig.

Es bleibt uns nur noch übrig, den Fall IIIb zu betrachten. In diesem Fall besitzt die Kopplungsmatrix  $A_{ik}^{(u)}$  (vgl. im § 7 das entsprechende für die echte Streuung) einerseits Elemente  $A_{ik}^{(u)}$  mit nicht-unterstrichenen Indizes, die sich auf die  $\bar{\alpha}_i$ , und solche  $A_{ik}^{(u)}$  mit unterstrichenen Indizes, die sich auf die  $\bar{\omega}_i$  beziehen. Die ersteren sind identisch mit denen des Falles Ib und die letzteren mit denen des Falles IIb. Die außerdem noch auftretenden Elemente mit gemischten Indizes  $A_{ik}^{(u)}$  und  $A_{ik}^{(u)}$  verschwinden sämtlich, da im Fall der unechten Streuung (im Gegensatz zu dem der echten Streuung!) *keine* statistische Kopplung zwischen den  $\bar{\alpha}_i$  und den  $\bar{\omega}_i$  bzw. zwischen den Koordinaten  $\bar{y}_i$  einerseits und den  $\bar{\beta}_i$  andererseits besteht. Um dies zu zeigen, genügt es, eine einzelne Zelle zu betrachten, wobei wir an die Ausführungen zu

lungsmatrix  $A_{ik}^{(u)}$  ein Faktor  $N/N' = s/c = 1/\alpha$  hinzu, den wir zweckmäßig in den Vorfaktor von  $A_{ik}^{(u)}$  aufnehmen. Für diesen ist also [z. B. in (9,14a) ff. bis (9,16)] an Stelle des für IIb gültigen  $(\delta^2 d/s^3)$  der Ausdruck  $[\delta^2 d/(c s^2)]$  für IIc zu setzen. Die Kopplungsmatrix  $A_{ik}^{(u)}$  selbst bleibt damit unverändert, und die Zahlenwerte für IIb in Tab. 8 gelten auch für IIc.

Beginn dieses Paragraphen anknüpfen. Wir gehen dabei aus von der  $N$ -dimensionalen Verteilungsfunktion der Koordinaten  $y_k$ . Diese ist ein Produkt von  $N$  Gauß-Funktionen der Form (9,1) und lautet daher in Fourier-Darstellung:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_N) = (2\pi)^{-N} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int d^N \xi e^{i \sum y_k \xi_k} e^{-\delta^2/4 \sum \xi_k^2}. \quad (9,21)$$

Wir wünschen nun durch eine lineare Transformation von den  $N$  Variablen  $y_k$  zu den zwei Variablen  $\bar{y}$  nach (9,3) und  $\bar{\beta}$  nach (9,4) überzugehen. Diese lineare Transformation wird bewerkstelligt durch eine rechteckige Matrix  $(S_{ik})$  mit zwei Zeilen ( $i=1, 2$ ) und  $N$  Spalten ( $k=1, 2, 3, \dots, N$ ), die im Einklang mit (9,3) und (9,4) lautet:

$$(S_{ik}) = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & N \\ \hline \bar{y} & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \\ \bar{\beta} & \frac{l_1}{\sum l_k^2} & \frac{l_2}{\sum l_k^2} & \frac{l_3}{\sum l_k^2} & \dots & \frac{l_N}{\sum l_k^2} \end{array}. \quad (9,22)$$

Die Verteilungsfunktion für die neuen Variablen  $\bar{y}$  und  $\bar{\beta}$  ergibt sich dann als zweidimensionales Fourier-Integral [analog dem  $N$ -dimensionalen (9,21)], wobei der Exponent der Fourier-Transformierten lautet:

$$-\frac{\delta^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N C_{ik} \eta_i \eta_k. \quad (9,23)$$

Dabei ist die zweireihige quadratische „Kopplungsmatrix“  $C_{ik}$  gegeben als das Matrixprodukt der Matrix  $(S_{ik})$  mit ihrer Transponierten  $(\tilde{S}_{ik}) = (S_{ki})$ , also ausführlich:

$$(C_{ik}) = \left( \sum_{j=1}^N S_{ij} S_{kj} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \frac{\sum l_i}{N \sum l_i^2} \\ \frac{\sum l_i}{N \sum l_i^2} & \frac{1}{\sum l_i^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{s} & 0 \\ 0 & \frac{12d}{s^3} \end{pmatrix}. \quad (9,24)$$

Die Diagonalelemente auf der rechten Seite von (9,24) bestätigen unsere früheren Ergebnisse (9,5) und (9,6). Das Verschwinden der Nicht-Diagonalelemente in (9,24), das aus der vorausgesetzten symmetrischen Anordnung der Körner in der Zelle folgt (diese Annahme ist berechtigt, wenn die Anzahl der Körner in der Zelle nicht zu klein ist), besagt, daß zwischen  $\bar{y}$  und  $\bar{\beta}$  keine statistische Kopplung besteht. — An Stelle des geschilderten

Verfahrens mit Verwendung rechteckiger Transformationsmatrizen hätten wir auch so vorgehen können, daß wir (9,22) durch Hinzufügung von  $N-2$  linear unabhängigen, sonst aber beliebigen weiteren Zeilen, denen  $N-2$  zu  $\bar{y}$  und  $\bar{\beta}$  hinzutretende „überzählige“ Variable entsprechen, zu einer quadratischen Matrix ergänzt hätten. Es hätte sich so zunächst eine Kopplungsmatrix  $C_{ik}$  mit  $N$  Zeilen und Spalten ergeben, bei der wir jedoch zur nachträglichen Befreiung von den überzähligen Variablen die diesen entsprechenden Zeilen und Spalten wieder zu streichen hätten. Das Ergebnis wäre offenbar identisch mit dem, wie wir es auf Grund des abgekürzten Verfahrens mit Hilfe rechteckiger Matrizen erhalten haben. Dieses Verfahren wird uns im folgenden Paragraphen noch mehrfach von Nutzen sein, weshalb es auch hier eingeführt wurde.

Damit ist gezeigt worden, daß die Kopplungsmatrix  $A_{ik}^{(u)}$  für die unechte Streuung im Fall III b außer den bereits in der Tab. 8 enthaltenen keine weiteren nicht-verschwindenden Elemente besitzt, weshalb wir darauf verzichten können, das Matrix-Schema hier ausführlich anzuschreiben. — Auch für den Fall III b läßt sich wiederum in Verallgemeinerung der Methoden des § 7 eine reduzierte Kopplungsmatrix  $a_{ik}$  für die kombinierte echte und unechte Streuung einführen, so daß die Formel (7,9) für die Verteilungsfunktion — mutatis mutandis — erhalten bleibt.

**Meßfehler.** Neben der unechten Streuung, die auf den Eigenschaften der photographischen Platte selbst beruht, ist nun auch der eigentliche Meßfehler in Betracht zu ziehen, der infolge der apparativ und durch die Person des Beobachters bedingten Begrenzung der Ablesegenauigkeit auftritt. (Vgl. Y. Goldschmidt<sup>8</sup>.) Für den gemeinsamen Einfluß von unechter Streuung und Meßfehlern ist in der Literatur die Bezeichnung „Störpegel“ („noise level“) gebräuchlich. — Die auftretenden Meßfehler sind statistisch unabhängig für diejenigen Größen, die unmittelbar gemessen werden, d. h. für die Winkel  $\bar{\beta}_i$  und die Koordinaten  $\bar{y}_i$ , also gerade für dieselben Größen, für die auch die unechte Streuung statistisch unabhängig ist. Es sei nun mit  $\gamma_{\bar{\beta}}^2$  bzw.  $\gamma_{\bar{y}}^2$  das doppelte mittlere Quadrat des Meßfehlers bezeichnet, der bei einmaliger Messung einer der Größen  $\bar{\beta}$  bzw.  $\bar{y}$  auftritt. Bei  $m$ -maliger unabhängiger Messung jeweils ein und derselben Größe verringert sich das doppelte mittlere Fehlerquadrat auf  $\gamma_{\bar{\beta}}^2/m$  bzw.  $\gamma_{\bar{y}}^2/m$ .

An die Stelle der Normal-Verteilungen (9,6) bzw. (9,5) infolge unechter Streuung allein treten also jetzt für die kombinierte Wirkung der unechten Streuung und des Meßfehlers die Normalverteilungen:

$$(\bar{\beta}; (12 \delta^2 d/s^3) + \gamma_{\beta}^2/m), \quad (9,25a)$$

$$\text{bzw. } (\bar{y}; (\delta^2 d/s) + \gamma_y^2/m). \quad (9,25b)$$

Alle in diesem Paragraphen für den Einfluß der unechten Streuung erhaltenen Ergebnisse — insbesondere die Formel (9,14c) und die folgenden — lassen sich also leicht verallgemeinern für den Fall, daß neben der unechten Streuung auch die Wirkung der Meßfehler auf die statistische Verteilung der Merkmalwerte berücksichtigt werden soll, und zwar folgt aus (9,25a) bzw. (9,25b), daß man dazu in Gl. (9,14c) und den folgenden zu ersetzen hat im Fall Ib:

$$\delta^2 d/s^3 \rightarrow (\delta^2 d/s^3) + \gamma_{\beta}^2/(12 m) \quad (9,26a)$$

und im Fall IIb:

$$\delta^2 d/s^3 \rightarrow (\delta^2 d/s^3) + \gamma_y^2/(m s^2). \quad (9,26b)$$

Es ist anzunehmen, daß die Zell-Länge  $s$  keinen unmittelbaren Einfluß auf die Meßgenauigkeit hat, daß also die Größen  $\gamma_{\beta}$  und  $\gamma_y$  unabhängig von  $s$  sind. Nimmt man dies als gültig an, so zeigt der Vergleich von (9,26a und b), daß der störende Einfluß des Meßfehlers auf das Ergebnis für die echte Streuung [wobei es also auf das Verhältnis des Zusatzgliedes rechts in (9,26a bzw. b) zu dem für die echte Streuung maßgeblichen Glied  $\chi_c'^2 B s$  in (9,14c) ankommt] durch Wahl einer größeren Zell-Länge  $s$  im Fall IIb in weit stärkerem Maße herabgedrückt werden kann als im Fall Ib.

### § 10. Zur Frage der geeignetsten Wahl der Merkmale und der Zell-Länge

Die hier folgenden Überlegungen betreffen die Frage nach der zur Erreichung einer möglichst großen Information über die Natur des Teilchens, das eine gegebene Spur erzeugt hat, am zweckmäßigsten zu verwendenden Methoden, d. h. insbesondere der geeignetsten Wahl der zu messenden Größen, der günstigsten Kombination dieser gemessenen Größen zu „Merkmalen“ für die statistische Auswertung, und schließlich der zweckmäßigsten Wahl der dabei verwendeten Zell-Länge  $s$ . (Neben dem Gesichtspunkt der größtmöglichen Information spielt auch der eines nicht zu großen Aufwandes zur Messung und rechnerischen Auswertung eine Rolle.)

Wir wenden uns zunächst der zweiten der genannten Teilfragen zu: der nach der geeignetsten Kombination der gemessenen Größen zu „Merkmalen“ und zwar für den Fall Ib. Wir nehmen demgemäß an, daß die gegebene Spur in  $n+1$  Zellen eingeteilt, und für diese die  $n+1$  Größen  $\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n$  gemessen worden seien. Unter diesen befindet sich noch eine willkürliche, und wir müssen daher  $n$  unabhängige Linearkombinationen der  $\bar{\beta}_i$ , die keine Willkürlichkeit mehr enthalten, als „Merkmale“ auswählen. Dies kann auf vielfache Weisen geschehen, die alle zueinander äquivalent sind und alle das Maximum an Informationsmöglichkeit vermitteln, das in den gemessenen Größen  $\bar{\beta}_i$  enthalten ist. Die einfachste unter diesen Möglichkeiten ist die bisher (für den Fall Ib) allein von uns diskutierte Wahl der  $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i - \bar{\beta}_{i-1}$  — d. h. der Winkel zwischen besten Geraden *benachbarter* Zellen — als die  $n$  Merkmale, die in diesem Falle alle untereinander gleichartig sind. Jede andere Wahl von  $n$  Merkmalen kann durch Linearkombination aus der unseren gewonnen werden; so z. B. kann man an Stelle der  $\bar{\alpha}_i$  die  $n$  Größen (wir wollen hier  $n$  als eine gerade Zahl annehmen):  $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_4, \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_4$  usw. als Merkmale verwenden. Die Verteilungsfunktion dieser neuen Merkmale erhält man aus der der  $\bar{\alpha}_i$ , indem man die Kopplungsmatrix in bekannter Weise linear transformiert. Freilich wird diese Kopplungsmatrix unnötig kompliziert dadurch, daß sich ihre Zeilen und Spalten auf zweierlei Arten von Merkmalen (nämlich die Summen und die Differenzen der  $\bar{\alpha}_i$ ) beziehen, wodurch die Auswertung erschwert wird. Abgesehen davon besteht jedoch — wie nochmals betont sei — Äquivalenz zwischen den neuen und den alten Merkmalen. Das gleiche gilt jedoch nicht mehr, sobald man zu einer (im Vergleich zur ursprünglichen Anzahl  $n$  der  $\bar{\alpha}_i$ ) verringerten Anzahl von neuen Merkmalen übergeht; denn durch Hinzufügung weiterer „überzähliger“ Merkmale könnte man deren Anzahl stets auf die volle Zahl  $n$  linear unabhängiger Merkmale ergänzen, die dann den  $\bar{\alpha}_i$  äquivalent sein und die volle Informationsmöglichkeit liefern würden. Die Beschränkung auf die Ausnutzung nur einer verringerten Anzahl von Merkmalen bedeutet also den Verzicht auf den von den „überzähligen“ Merkmalen vermittelten Teil der gesamten Informationsmöglichkeit. Dies bleibt auch gültig für den Fall, daß die tatsächlich ausgenutzten Merkmale (mit gegenüber  $n$  verminderter Anzahl) sehr günstig gewählt sind, so daß die

durch die vermittelte Informationsmöglichkeit bezogen auf ihre geringe Anzahl relativ groß ist. Sofern es sich also darum handelt, die in den gemessenen  $\bar{\beta}_i$  enthaltene Informationsmöglichkeit (über die Energie des die Spur erzeugenden Teilchens usw.) wirklich voll auszunutzen, ist es am zweckmäßigsten, die Merkmale  $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i - \bar{\beta}_{i-1}$  zu verwenden.

Die Verwendung einer verringerten Anzahl besonders günstig gewählter Merkmale kann jedoch in Fällen, in denen es nicht auf die Ausnützung der maximal erreichbaren Genauigkeit ankommt, aus Gründen der Ersparnis an Zeit- und Arbeitsaufwand angezeigt sein. Unter diesem Gesichtspunkt seien hier die von Goldschmidt-Clérmont verwendeten Merkmale, nämlich die Winkel zwischen besten Geraden der nullten und  $m$ -ten Zelle, der  $m$ -ten und  $2m$ -ten Zelle, der  $2m$ -ten und  $3m$ -ten Zelle usw. diskutiert. ( $m$  ist eine ganze Zahl, für die Goldschmidt meist den Wert 2, gelegentlich aber auch einen größeren Wert wählt.) Diese Merkmale seien mit  $\bar{\alpha}_i^{(m)}$  bezeichnet:

$$\bar{\alpha}_i^{(m)} \equiv \bar{\beta}_{im} - \bar{\beta}_{(i-1)m} = \bar{\alpha}_{(i-1)m+1} + \bar{\alpha}_{(i-1)m+2} + \dots + \bar{\alpha}_{im}. \quad (10,1)$$

(Dabei durchläuft  $i$  die Werte  $i = 1, 2, 3, \dots, n/m$ , wobei der Einfachheit halber  $n$  als durch  $m$  teilbar angenommen ist.) — Man kann nun ausgehend von der Kopplungsmatrix  $A_{ik}$  für die  $\bar{\alpha}_i$  durch eine lineare Transformation zu der Kopplungsmatrix für die neuen Merkmale  $\bar{\alpha}_i^{(m)}$  übergehen, wobei sich herausstellt, daß diese von der gleichen Bauart ist wie  $A_{ik}$ , d. h. nur ihre Diagonalelemente (die untereinander numerisch gleich sind) und deren Nachbarelemente (die ebenfalls untereinander gleich sind) sind von Null verschieden. Darüber hinaus zeigt es sich, daß die Kopplungsmatrix für die *unechte* Streuung auch im numerischen Wert ihrer Elemente, d. h. der Diagonalelemente  $A_{11}^{(u)}$  und deren Nachbarelemente  $A_{12}^{(u)}$ , für die  $\bar{\alpha}_i^{(m)}$  und für die  $\bar{\alpha}_i$  übereinstimmt. Für die Kopplungsmatrix  $A_{ik}^{(e)}$  für die *echte* Streuung gilt das gleiche nur für die Nicht-Diagonalelemente  $A_{12}^{(e)}$ , während die Diagonalelemente  $A_{11}^{(e)}$  im Fall der Merkmale  $\bar{\alpha}_i^{(m)}$  gegenüber ihrem für die  $\bar{\alpha}_i$  gültigen Zahlenwert um den Faktor<sup>16</sup>

<sup>16</sup> Sei  $S$  diejenige rechteckige Matrix (mit  $n/m$  Zeilen und  $n$  Spalten), mit deren Hilfe der Übergang von den  $\bar{\alpha}_i$  zu den  $\bar{\alpha}_i^{(m)}$  nach (10,1) formal ausgedrückt werden kann. Sei ferner  $A_{ik}$  die Kopplungsmatrix für die  $\bar{\alpha}_i$ . Die Kopplungsmatrix für die  $\bar{\alpha}_i^{(m)}$  ist dann ge-

$$m + 9(m-1)/26 \quad (10,2)$$

vergrößert sind. Dies besagt, daß bei Verwendung der  $\bar{\alpha}_i^{(m)}$  die echte Streuung stärker gegenüber der unechten Streuung hervortritt als im Fall der  $\bar{\alpha}_i$  und daß überdies für die echte Streuung eine geringere statistische Kopplung der  $\bar{\alpha}_i^{(m)}$  untereinander besteht als für die  $\bar{\alpha}_i$ . Man erkennt daraus, daß die  $n/m$  Größen  $\bar{\alpha}_i^{(m)}$  in manchen Fällen eine sehr viel größere Informationsmöglichkeit vermitteln als eine *gleich große* Anzahl von Merkmalen  $\bar{\alpha}_i$ . Die von der Gesamt-Anzahl  $n$  der  $\bar{\alpha}_i$  vermittelte Informationsmöglichkeit ist jedoch — wie nochmals betont sei — in jedem Fall größer. Freilich kann diese maximale Informationsmöglichkeit erst dadurch wirklich ausgenutzt werden, daß die statistische Kopplung der Merkmale untereinander exakt berücksichtigt werden kann. Solange dies noch nicht möglich war, war die Verwendung der  $\bar{\alpha}_i^{(m)}$  nicht nur zweckmäßig, sondern geradezu notwendig.

Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf die dritte der zu Beginn dieses Paragraphen aufgeführten Fragen: der nach der günstigsten Wahl der Zell-Länge  $s$ . Wir untersuchen in dieser Hinsicht zunächst den Fall IIb, denken uns also eine Spur in  $n+2$  Zellen der Länge  $s$  eingeteilt und für jede dieser Zellen die Schwerpunkts-Koordinate  $\bar{y}_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$ ) gemessen und aus diesen die Merkmale  $\bar{\omega}_i = (\bar{y}_{i-1} - 2\bar{y}_i + \bar{y}_{i+1})/s$  ermittelt. Die Verteilungsfunktion für die  $n$  Größen  $\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sei in der Form (9,13) mit (9,14c) gegeben. — Nunmehr denken wir uns je zwei benachbarte Zellen (und zwar die nullte mit der ersten, die zweite mit der dritten usw.) zu einer „Doppelzelle“ der Länge  $2s$  vereinigt. Die Schwerpunktskoordinaten  $\bar{Y}_k$  der Doppelzellen lassen sich durch diejenigen  $\bar{y}_i$  der Einzelzellen ausdrücken gemäß

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{2} (\bar{y}_{2k} + \bar{y}_{2k+1}), \quad (10,3)$$

wobei  $k$  die Werte durchläuft:  $k = 0, 1, 2, \dots, n/2$ ,  $n/2 + 1$  (sofern  $n$  durch zwei teilbar ist). Analog zu den  $\bar{\omega}_i$  definieren wir die auf die Doppelzelle bezüglichen Merkmale:

$$\bar{\Omega}_k = \frac{1}{2s} (\bar{Y}_{k-1} - 2\bar{Y}_k + \bar{Y}_{k+1}), \quad (10,4)$$

geben durch  $S(A_{ik})\tilde{S}$ . Setzt man hierin für  $A_{ik}$  die im Fall Ib für die echte und für die unechte Streuung maßgeblichen Matrizen ein (vgl. Tab. 5 und 8), so folgen für die transformierten Matrizen die genannten Ergebnisse und insbesondere (10,2).



(wobei  $k=1, 2, \dots, n/2$ ). Aus (10,3) und (10,4) folgt, daß sich die  $\bar{Q}_k$  durch die  $\bar{\omega}_i$  ausdrücken lassen:

$$\bar{Q}_k = \frac{1}{4} \bar{\omega}_{2k-1} + \frac{3}{4} \bar{\omega}_{2k} + \frac{3}{4} \bar{\omega}_{2k+1} + \frac{1}{4} \bar{\omega}_{2k+2}. \quad (10,5)$$

Der Übergang von den auf die Einzelzelle bezüglichen  $\bar{\omega}_i$  zu den auf die Doppelzelle bezüglichen  $\bar{Q}_k$  läßt sich formal beschreiben als Transformation mit der rechteckigen Matrix:

$$T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (10,6)$$

mit  $n/2$  Zeilen und  $n$  Spalten. Es sei nun  $(A_{ik})$  die Kopplungsmatrix für die (auf die Einzelzelle bezogenen) Merkmale  $\bar{\omega}_i$ . Wie wir wissen, ist sie (in dem hier betrachteten Fall II b) von der allgemeinen Gestalt:

$$(A_{ik}) = \begin{pmatrix} A & B & C & C & C & C \\ B & A & B & B & B & B \\ C & B & A & A & A & A \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}. \quad (10,7)$$

Die auf die neuen Merkmale  $\bar{Q}_k$  bezügliche Kopplungsmatrix ergibt sich daraus durch die Transformation  $T(A_{ik})\tilde{T}$  mit  $T$  nach (10,6). Führt man diese Transformation aus, so zeigt es sich, daß die transformierte Kopplungsmatrix (abgesehen von der auf die Hälfte verminderten Dimensionszahl) von der gleichen allgemeinen Gestalt ist wie (10,7), wobei an Stelle von  $A, B, C$  die Größen  $A', B', C'$  auftreten:

$$A' = \frac{5}{4} A + \frac{15}{8} B + \frac{3}{4} C, \quad (10,8a)$$

$$B' = \frac{3}{8} A + B + \frac{5}{4} C \quad (10,8b)$$

$$\text{und} \quad C' = \frac{1}{16} B + \frac{3}{8} C. \quad (10,8c)$$

Wir stellen nun die Frage, unter welchen Bedingungen die Konstanten  $A', B'$  und  $C'$  zu  $A, B$  und  $C$  proportional sind, d. h.  $A' = \lambda A$ ,  $B' = \lambda B$  und  $C' = \lambda C$  gilt. Dies führt mit (10,8a, b und c) auf eine Säkulargleichung dritten Grades für  $\lambda$ , als deren drei Lösungen man erhält:

$$\lambda = 2, \quad 1/2 \text{ und } 1/8. \quad (10,9)$$

Für die zugehörigen drei Eigenlösungen  $(A, B, C)$  ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 66 \\ 26 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_{1/2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_{1/8} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10,10)$$

Der Vergleich mit den Tab. 5 und 8 (für den Fall II b) zeigt, daß die Eigenlösung zum Eigenwert 2 der Kopplungsmatrix für die echte Streuung und diejenige zum Eigenwert  $1/8$  der Kopplungsmatrix für die unechte Streuung entspricht. Die Eigenwerte 2 bzw.  $1/8$  selbst entsprechen dabei der Ersetzung von  $s$  durch  $2s$  im Vorfaktor von  $A_{ik}^{(e)}$  bzw.  $A_{ik}^{(u)}$  in (9,14c). Auch bei Mitberücksichtigung der Meßfehler-Statistik ist der Faktor  $1/8$  vor  $A_{ik}^{(u)}$  gerade der richtige, den man sinngemäß erwarten muß: er entspricht im zweiten Gliede rechts in (9,26b) zugleich der Ersetzung  $s \rightarrow 2s$  und  $m \rightarrow 2m$ . Durch die letztere Ersetzung wird der Tatsache Rechnung getragen, daß gemäß (10,3) jeder Zahlenwert  $\bar{Y}_k$  auf doppelt so vielen Messungen basiert als jedes  $\bar{y}_i$ .

Aus den voranstehenden Betrachtungen können wir folgern: Die Verteilungsfunktion für die  $n$  Merkmale  $\bar{\omega}_i$ , bezogen auf die Zell-Länge  $s$ , enthält in sich (u. a.) die Verteilungsfunktion für die  $n/2$  Größen  $\bar{Q}_k$ , bezogen auf die doppelte Zell-Länge  $2s$ . Sie enthält aber tatsächlich *mehr*, d. h. durch die  $n$  Größen  $\bar{\omega}_i$  wird eine *größere* Informationsmöglichkeit vermittelt, als durch die halb so große Anzahl der  $\bar{Q}_k$ . Dies gilt *auch dann*, wenn der Einfluß der unechten Streuung für jede einzelne der Größen  $\bar{\omega}_i$  unerwünscht groß ist; vielmehr wird der dadurch bedingte Nachteil durch die exakte Berücksichtigung der statistischen Kopplung der  $\bar{\omega}_i$  untereinander wieder wettgemacht. Zur Erzielung einer möglichst großen Information über die Eigenschaften des Teilchens, das die Spur erzeugt hat (d. h. z. B. einer möglichst großen Genauigkeit in der Bestimmung von dessen Energie), ist es daher wünschenswert, die Zell-Länge  $s$  möglichst klein und die Anzahl der Zellen entsprechend groß zu wählen. Freilich wird, wenn man zu immer kleinerer und kleinerer Zell-Länge übergeht, der dabei erzielte Gewinn an Informationsmöglichkeit schließlich nicht mehr der Vermehrung der Anzahl  $n$  von Merkmalen entsprechen, vielmehr wird in dieser Hinsicht eine Art von Sättigung eintreten. Ferner ist zu beachten, daß für die Wahl der Zell-Länge  $s$  durch *andere* Bedingungen eine untere Grenze gesetzt ist, so vor allem dadurch, daß die Anzahl der geschwärzten Körner pro Zelle nicht zu klein sein soll (vgl. § 9). (Auch die Gültigkeitsbedingung für die Theorie der *Vielfach*-Streuung wirkt in gleichem Sinne, doch würde diese Bedingung im Fall der photographischen Platte erst bei extrem kleinen und praktisch nicht in Betracht

kommenden Zell-Längen von der Größenordnung eines Mikron eine Rolle spielen.)

Es erhebt sich nun die Frage, ob die obigen, für den Fall IIb gezogenen Schlüsse sich auf den Fall Ib übertragen lassen. Diese Frage muß *verneint* werden; denn es ist nicht möglich, den Winkel  $\bar{\beta}$ , den die einer Doppelzelle (der Länge  $2s$ ) angepaßte beste Gerade mit einer Bezugsgeraden bildet, *allein* durch die Winkel  $\bar{\beta}_1$  und  $\bar{\beta}_2$  der den beiden Teil-Zellen (der Länge  $s$ ) angepaßten besten Geraden auszudrücken. Vielmehr kann man zeigen, daß gilt:

$$\bar{\beta} = \frac{1}{8} (\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2) + \frac{3}{4s} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2), \quad (10, 11)$$

wobei  $\bar{y}_1$  und  $\bar{y}_2$  die auf die gleiche Bezugsgerade bezogenen Schwerpunktskoordinaten der beiden Teilzellen sind. Damit hängt zusammen (vgl. § 11), daß es im Fall Ib eine optimale Zell-Länge gibt; wird diese unterschritten, so wirkt sich der wachsende Einfluß der unechten Streuung in stärkerem Maße schädlich aus, als dies durch den Gewinn infolge der wachsenden Anzahl  $n$  von Merkmalen ausgeglichen werden könnte. — Wohl aber lassen sich die obigen Schlüsse auf den Fall IIIb, in dem Winkel bester Geraden *und* Schwerpunktskoordinaten zugleich gemessen und verwertet werden, übertragen.

Damit sind wir auch in der Lage, die erste der zu Beginn dieses Paragraphen aufgeworfenen Fragen: „Welche Größen soll man messen?“ folgendermaßen zu beantworten: Vom Standpunkt der größtmöglichen Information aus ist der Fall IIIb (Schwerpunktskoordinaten *und* Winkel bester Geraden) am günstigsten. Praktisch kommt dieser Fall freilich — wegen seiner meßtechnischen und rechnerischen Umständlichkeit — nur zur Auswertung sehr kurzer Spuren mit geringer Zellen-Zahl in Betracht. Immer sonst ist der Fall IIb (Schwerpunktskoordinaten) am günstigsten.

## § 11. Auswertung der Meßergebnisse

Bisher haben wir — unter der Voraussetzung, daß die Teilchen-Eigenschaften wie Masse, Ladung und Energie bekannt sind — die Wahrscheinlichkeit  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$  dafür betrachtet, daß Meßwerte für die „Merkmale“ bei  $x_i$  innerhalb der Intervalle  $dx_i$  gefunden werden. Die Verteilungsfunktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  hängt dabei nach (7,4) von der (als Maßeinheit für die  $x_i$  fungierenden) Größe  $x_0$  sowie von den Koeffizienten  $a_{ik}^{-1}$  und

der Größe  $D_n$  als Parametern ab, und in diesen Parametern — insbesondere in  $x_0$  — steckt die Abhängigkeit von den Teilchen-Eigenschaften. Für  $x_0$  können wir dabei zur Abkürzung nach (9,15) setzen:

$$x_0^2 = x_e^2 + x_u^2 \quad (11,1)$$

mit

$$x_e^2 = \chi_e'^2 B s A^{(e)} \quad (11,2a)$$

und

$$x_u^2 = (\delta^2 d/s^3) A^{(u)}. \quad (11,2b)$$

Wir werden im folgenden zunächst den einfachen Fall behandeln, daß der Einfluß der unechten Streuung vernachlässigbar klein ist, so daß in (11,1)  $x_u^2 = 0$  gesetzt werden kann. Ebenfalls ist dann das zweite Glied im Zähler von (9,16) zu streichen, womit  $a_{ik}$  — und somit auch die in (7,4) auftretenden Parameter  $D_n$  und  $a_{ik}^{-1}$  — ihre für die echte Streuung maßgeblichen konstanten Werte annehmen. Der einzige von den Teilchen-Eigenschaften abhängige Parameter in (7,4) ist also in diesem Falle die Größe  $x_0 = x_e$ . Zur Vereinfachung der Sprechweise werden wir im folgenden nur von der Energie  $E$  als der uns interessierenden Teilchen-Eigenschaft reden (über Masse und Ladung können notfalls unter Mitberücksichtigung der Korndichte Aussagen gemacht werden), sowie speziell die (für genügend große Energie gültige) Gleichung verwenden:

$$x_e = C \sqrt{s/E}. \quad (11,3)$$

(Allgemeiner hätte hier  $pv$  statt  $E$  zu stehen;  $C$  ist die für die Streuung maßgebliche Konstante.) — Die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  vom Parameter  $E$  werden wir im folgenden gelegentlich mit im Argument anmerken, also schreiben:  $f(E; x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Wir wollen nun die bisherige Fragestellung umkehren und annehmen, daß feste, durch Messung an einer speziellen Spur gewonnene Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der Merkmale vorliegen. Auf Grund dieser Daten soll die Energie  $E$  (allgemeiner: die Teilchen-Eigenschaften) ermittelt — bzw. genauer gesagt — eine möglichst genaue statistische Aussage über die Energie  $E$  gemacht werden. — Im allgemeinen wird nun bereits „a priori“, d. h. *vor* Auswertung des speziellen Meßergebnisses eine gewisse — meist noch sehr grobe — statistische Aussage über die Energie des Teilchens möglich sein, und zwar allein auf Grund der Tatsache, daß die spezielle betrachtete Spur in eine größere Klasse ähnlicher Spuren hineingehört, über deren Energie-

Spektrum bereits etwas bekannt ist. So z. B. kann es sich um die Spur eines „Schauer-Teilchens“ handeln, d. h. eine solche mit nahezu minimaler Korndichte, die aus einem „Stern“ stammt. Das Energie-Spektrum der Gesamtheit der „Schauer-Teilchen“ wird bereits aus einer mehr oder minder großen Anzahl früherer Messungen an ähnlichen Spuren mehr oder minder genau bekannt sein und mag z. B. durch ein Potenzgesetz:

$$G(E) dE = \text{const} \cdot E^{-\gamma} dE \quad (11,4)$$

mit (in dem in Betracht kommenden Energiebereich) festem Exponenten  $\gamma$  wiedergegeben werden. Dieses Spektrum (11,4) dient uns dann als „A-priori-Wahrscheinlichkeit“ und beschreibt diejenige statistische Kenntnis von der Energie des Teilchens, die wir bereits *vor* Auswertung der speziellen Meßwerte  $x_1, \dots, x_n$  besitzen. — Die „a posteriori“, d. h. durch Berücksichtigung des Meßergebnisses  $x_1, x_2, \dots, x_n$  für unser spezielles Teilchen verfeinerte Kenntnis der Energie möge nun beschrieben werden durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $F(E) dE$ , die die Antwort gibt auf die Frage, wie wahrscheinlich es ist, daß eine Spur, an der bestimmte Meßwerte  $x_1, \dots, x_n$  der Merkmale gefunden wurden, erzeugt wurde von einem Teilchen, dessen Energie im Intervall  $dE$  bei  $E$  lag. (Genau genommen sollte im Argument von  $F(E)$  die Abhängigkeit von den Parametern  $x_1, \dots, x_n$  mit angemerkt werden, wovon wir der Übersichtlichkeit halber absehen.) Wir behaupten nun: die gesuchte „A-posteriori-Wahrscheinlichkeit“ ist gegeben durch:

$$F(E) dE = f(E; x_1, x_2, \dots, x_n) G(E) dE, \quad (11,5)$$

wobei  $f(E; x_1, x_2, \dots, x_n)$  die bereits oben betrachtete Verteilungsfunktion ist. Gl. (11,5) ist in dem Sinne zu verstehen, daß sowohl  $G(E)$  wie  $F(E)$  *relative* oder *un-normierte* Wahrscheinlichkeits-Dichten bedeuten, die nur bis auf einen konstanten Faktor definiert sind. (Es ist also bei der Bildung von Mittelwerten usw. stets noch durch das Normierungs-Integral zu dividieren, also z. B.:  $\bar{E} = \int F(E) E dE / \int F(E) dE$ .) Um dies einzusehen, betrachten wir (als Beispiel) wiederum die Gesamtheit der „Schauer-Teilchen“. Unter diesen befindet

sich eine Teil-Gesamtheit der relativen Anzahl  $G(E) dE$  mit einer Energie in  $dE$  bei  $E$ . Von dieser Teil-Gesamtheit wird wiederum ein gewisser Bruchteil Spuren mit Merkmal-Werten bei  $x_1, \dots, x_n$  innerhalb  $\delta x_1 \dots \delta x_n$  erzeugen, und zwar ist dieser Bruchteil nach dem obigen  $f(E; x_1, \dots, x_n) \delta x_1 \dots \delta x_n$ . Diejenige Teil-Gesamtheit von „Schauer-Teilchen“, die eine Energie bei  $E$  in  $dE$  haben und Spuren mit Merkmal-Werten bei  $x_i$  in  $\delta x_i$  erzeugen, ist also gegeben durch das Produkt:  $f(E; x_1, \dots, x_n) \delta x_1 \dots \delta x_n \cdot G(E) dE$ . Betrachten wir in diesem Ausdruck  $E$  als variabel und die  $x_i$  als konstant (sowie die Intervalle  $\delta x_i$  als beliebig klein aber endlich), so folgt unsere Gl. (11,5) — abgesehen von dem konstanten Faktor  $\delta x_1 \dots \delta x_n$ . Dieser kann weggelassen werden (er würde z. B. bei der Bildung von Mittelwerten bezüglich  $E$  herausfallen), da wir hier mit un-normierten Wahrscheinlichkeiten operieren.

Wir wenden uns nun der Auswertung von (11,5) für den Fall zu, daß nur echte Streuung vorliegt. Wir können in diesem Fall in (7,4)  $x_0$  durch  $x_e$  ersetzen und die Variable  $1/x_e$ , die nach (11,3) (bei genügend großer Energie) zu  $E$  proportional ist, an Stelle von  $E$  als Variable verwenden. Für die A-priori-Wahrscheinlichkeit (die jetzt kurz mit  $dG$  bezeichnet sei) können wir daher nach (11,4) setzen:  $dG = x_e^{-\gamma} d(1/x_e)$ . Damit und mit (7,4) folgt für die (kurz mit  $dF$  bezeichnete) Wahrscheinlichkeit (11,5) unter Weglassung unwesentlicher konstanter Faktoren und unter Benutzung des mit Hilfe der Meßwerte  $x_i$  zu bildenden Ausdrucks  $Q$  nach (8,1):

$$dF = \left( \frac{1}{x_e} \right)^{n-\gamma} e^{-Q/x_e^2} d \left( \frac{1}{x_e} \right). \quad (11,6)$$

Diese Verteilungsfunktion besitzt (sofern  $n$  groß genug ist) ein steiles Maximum, und es wird daher genügen, sie durch einen geeigneten mittleren oder wahrscheinlichen Wert von  $1/x_e$ , den wir als das Meßergebnis betrachten — ergänzt durch die Angabe der Schwankungsbreite, die die Grenzen der Meßgenauigkeit angibt —, zu charakterisieren. So z. B. können wir als Meßwert von  $1/x_e$  (der nach (11,3) mit dem Meßwert von  $E$  verknüpft ist) den gewöhnlichen Mittelwert  $(1/\bar{x}_e)$  verwenden:

$$\frac{E}{C \sqrt{s}} = \left( \frac{1}{\bar{x}_e} \right) \equiv \frac{\int \frac{1}{x_e} dF}{\int dF} = Q^{-1/2} \frac{\left( \frac{n-\gamma}{2} \right)!}{\left( \frac{n-\gamma-1}{2} \right)!} \simeq \left[ \frac{(n-\gamma) + \frac{1}{2}}{2Q} \right]^{1/2}. \quad (11,7)$$

Die letzte (näherungsweise) Gleichung in (11,7) folgt dabei unter Verwendung des (für unsere Zwecke ausreichenden) ersten Gliedes der asymptotischen Entwicklung:

$$\frac{x!}{(x - \frac{1}{2})!} = \frac{1}{2} \left[ (4x+1) + \frac{1/2}{(4x+1)} - \frac{9/8}{(4x+1)^3} + \frac{153/16}{(4x+1)^5} - + \dots \right]^{1/2}. \quad (11,8)$$

Es liegt nun keinerlei Grund vor, als Meßwert  $1/x_e$  an Stelle des Mittelwertes  $\overline{1/x_e}$  nicht genau so gut den reziproken Wert des Mittelwertes  $\bar{x}_e$  zu verwenden. In diesem Falle erhält man an Stelle von (11,7):

$$\frac{E}{C\sqrt{s}} = (\bar{x}_e)^{-1} \equiv \frac{\int dF}{\int x_e dF} = Q^{-1/2} \frac{\left(\frac{n-\gamma-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-\gamma-2}{2}\right)!} \sim \left[ \frac{n-\gamma-\frac{1}{2}}{2Q} \right]^{1/2}. \quad (11,7')$$

Da (11,7) und (11,7') völlig gleichberechtigt sind, wählen wir als geeignetsten „Meßwert“  $1/x_e$  den etwa in der Mitte zwischen beiden liegenden

$$\frac{E}{C\sqrt{s}} = \frac{1}{x_e} = \left[ \frac{n-\gamma}{2Q} \right]^{1/2}. \quad (11,9)$$

Als geeignetes Maß für die Schwankung  $\delta(1/x_e)$  haben wir sinngemäß die Wurzel aus dem mittleren Quadrat der Abweichung von dem „Meßwert“  $1/x_e$  zu nehmen; dies ergibt nach leichter Rechnung

$$\frac{\delta E}{C\sqrt{s}} = \delta \left( \frac{1}{x_e} \right) \equiv \left( \left[ \left( \frac{n-\gamma}{2Q} \right)^{1/2} - \frac{1}{x_e'} \right]^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} Q^{-1/2} \quad (11,10)$$

[wobei  $1/x_e'$  — zum Unterschied von dem „Meßwert“  $1/x_e$  nach (11,9) — den gemäß (11,6) variablen Wert bedeutet]. Für die relative Schwankung, d. h. den Quotienten von (11,10) und (11,9), folgt somit:

$$\frac{\delta E}{E} \frac{\delta(1/x_e)}{(1/x_e)} = \left[ \frac{1}{2(n-\gamma)} \right]^{1/2}. \quad (11,11)$$

Man zeigt übrigens leicht, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich  $1/x_e'$  nach (11,6) gerade an der durch (11,9) gegebenen Stelle ihr Maximum besitzt und dort durch eine Gauß-Funktion mit der Schwankungsbreite (11,10) am besten angenähert wird. Dies wird uns die Berechtigung geben, in den folgenden komplizierteren Fällen eine Sattelpunktmethode für die Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich  $1/x_e'$  zugrunde zu legen. (Es ist dies insofern nicht selbstverständlich, als z. B. die Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich  $x_e'$  von der bezüglich  $1/x_e'$  um den Faktor  $x_e'^2$  verschieden ist und daher ihr Maximum an einer etwas anderen Stelle hat<sup>17</sup>.)

Wir wenden uns jetzt dem Fall zu, daß die unechte Streuung nicht vernachlässigt werden darf.

Wir haben dann zwischen den Größen  $x_e'^2$  und  $x_0^2 = x_e'^2 + x_u^2$  [vgl. (11,1) und (11,2)] zu unterscheiden. [Mit  $x_e'$  bezeichnen wir — wie bereits oben — den variablen Wert der Größe (11,2a), während  $x_e$  den zu bestimmenden Meßwert bedeuten soll.] Die aus gegebenen Meßwerten der Merkmale folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Variablen  $1/x_e'$  lautet daher jetzt an Stelle der früheren Gl. (11,6):

$$dF = (x_e'/x_0^n) D_n^{-1/2} e^{-Q/x_0^2} d(1/x_e'). \quad (11,12)$$

Der aus (7,4) stammende Faktor  $D_n^{-1/2}$  darf jetzt [im Gegensatz zu (11,6)] nicht fortgelassen werden, da er — ebenso wie auch die Größe  $Q$  — von dem Verhältnis zwischen den Größen  $x_u^2$  und  $x_e'^2$  abhängt. Zweckmäßig führen wir den Parameter

$$\mu = x_u^2/x_e'^2 \quad (11,13)$$

ein. Mit Hilfe dieses Parameters kann die reduzierte Kopplungsmatrix  $a_{ik}$  nach (9,16) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$a_{ik} = \frac{a_{ik}^{(e)} + \mu a_{ik}^{(u)}}{1 + \mu}, \quad (11,14)$$

woraus die Abhängigkeit der Determinante  $D_n \equiv \text{Det}(a_{ik})$  und der Reziproken  $a_{ik}^{-1}$  vom Parameter  $\mu$  folgt. Im Anhang sind die Größen  $D_n$  und die zur Berechnung der (aus den gemessenen Merkmalswerten zu bildenden) quadratischen Form  $Q$  erforderlichen Hilfsgrößen [vgl. (8,6) bis (8,8) für den Fall Ib sowie (8,18) bis (8,21) für den Fall IIb] als Funktionen des Parameters  $\mu$  tabuliert. — Es ist nun zu beachten, daß die Größe  $x_u^2$  eine Konstante ist, deren Wert (aus der gewählten Zelllänge  $s$ , dem gemessenen mittleren Kornabstand  $d$  und der Plattenkonstante  $\delta$ ) vorweg bestimmt werden kann. Zweckmäßig kann man daher an Stelle der Variablen  $1/x_e'$  den Parameter  $\mu$  nach (11,13)

<sup>17</sup> Anm. b. d. Korr.: Die hier geschilderte Methode ist im wesentlichen identisch mit der in der Literatur als „method of maximum likelihood“ bekannten. Vgl.:

Harald Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press (1946).

als Variable in (11,12) verwenden. Dabei dürfen wir zur Vereinfachung eine passende Potenz von  $x_u$  zu (11,12) als Faktor hinzufügen. Wir können dann statt (11,12) schreiben:

$$dF = e^{-\psi(\mu)} d\mu \quad (11,12')$$

$$\text{mit } \psi(\mu) = \frac{Q(\mu)}{x_u^2} \frac{\mu}{\mu+1} + \frac{1}{2} \ln D_n(\mu) + \frac{n}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu} + \frac{\gamma}{2} \ln \mu. \quad (11,15)$$

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeitsdichte  $e^{-\psi(\mu)}$  in der Umgebung ihres Maximums durch eine Gauß-Funktion annähern, aus deren Lage und Breite wir den Meßwert und die Schwankungsbreite der Größe  $\mu$  bzw.  $1/x_e'$  ermitteln. Anders ausgedrückt haben wir also die Funktion  $\psi$  nach (11,15) in der Umgebung ihres Minimums durch eine Parabel anzunähern gemäß:

$$\psi(\mu) = (\mu - \mu_0)^2 / \mu_1^2. \quad (11,16)$$

Der Meßwert und die relative Fehlerbreite für  $1/x_e$  folgen dann aus den beiden Parametern in (11,16).

$$\frac{E}{C\sqrt{s}} = \frac{1}{x_e} = \frac{\mu_0}{x_u^2} \quad (11,17)$$

$$\text{und } \frac{\delta E}{C\sqrt{s}} = \delta\left(\frac{1}{x_e}\right) = \frac{\mu_1 x_e}{2\sqrt{2} x_u^2}. \quad (11,18)$$

Für die relative (Fehler-) Schwankungsbreite folgt daraus

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\mu_1}{2\sqrt{2}\mu_0}. \quad (11,18')$$

Zur Bestimmung der beiden Konstanten  $\mu_0$  und  $\mu_1$  kann natürlich ein analytisches Verfahren verwendet werden. Dies würde aber die Tabulierung bzw. die jedesmalige Berechnung der ersten und zweiten Ableitung der Größen  $D_n$  und  $Q$  nach dem Parameter  $\mu$  erforderlich machen und würde im ganzen sehr umständlich werden. Viel bequemer wird es sein, ein direktes numerisches Verfahren zu verwenden, darin bestehend, daß man einige Punkte der Funktion  $\psi(\mu)$  nach (11,15) direkt berechnet. Es genügt, drei Punkte in der Umgebung des Minimums zu kennen, um die Konstanten in (11,16) bestimmen zu können. (Praktisch wird man sich diese Arbeit ein für allemal so weit vorbereiten können, daß es im wesentlichen nur noch auf die Berechnung einiger Werte  $Q(\mu)$  ankommt.)

Wir müssen noch darauf eingehen, wie man verfahren soll, wenn Einzelstreuwinkel, d. h. einzelne ausgeprägte Knicke der Spur auftreten. In diesem Fall bleibt vorerst nichts anderes übrig, als das übliche „Abschneide-Verfahren“ zu verwenden.

Möge z. B. ein solcher Winkel auftreten, so daß die Spur in zwei Teilspuren mit den Dimensionszahlen  $n'$  und  $n''$  zerfällt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $1/x_e'$  [(11,6) bzw. (11,12)] ist dann das Produkt bzw. die Funktion  $\psi$  nach (11,12') die Summe der für die beiden Teilspuren gültigen Ausdrücke mit dem Unterschied, daß der von der A-priori-Wahrscheinlichkeit herrührende Term nur einmal auftreten darf.

## § 12. Spur unter dem Einfluß von Streuung und magnetischer Ablenkung

Groetzinger und Mitarbb.<sup>9</sup> haben in einer interessanten Arbeit den kombinierten Einfluß der Vielfachstreuung und der magnetischen Ablenkung auf Teilchen-Spuren in der Nebelkammer untersucht. Die Verfasser verwenden — ganz analog dem hier behandelten, zur Untersuchung der Streuung von Platten-Spuren üblichen Verfahren eine Einteilung der Spur in Zellen gleicher Länge. Durch gesonderte statistische Analyse einerseits des Mittelwertes und andererseits der Schwankung der Winkeländerungen von Zelle zu Zelle gelingt es ihnen, den Einfluß des Magnetfeldes einerseits und der Vielfachstreuung andererseits zu trennen. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, in günstigen Fällen zwei Teilchen-Eigenschaften (Masse und Energie) zu bestimmen. In anderen Fällen (insbesondere bei bekannter Masse) ergänzen sich die auf den beiden Ursachen beruhenden Informationsquellen, und je nach den besonderen Umständen überwiegt die eine oder die andere derselben in ihrem Wert. Die genannten Verfasser benutzen als „Merkmale“ speziell die Winkel  $\omega_i$  zwischen den Sehnen benachbarter Zellen, entsprechend unserem Fall IIa, wobei sie allerdings die statistische Kopplung der  $\omega_i$  untereinander vernachlässigen.

Wir wollen nun kurz zeigen, wie das in dieser Arbeit behandelte Verfahren zur Auswertung der Streuung — also unter Mit-Berücksichtigung der statistischen Kopplung zwischen den Merkmalen — auf den von Groetzinger und Mitarbb. behandelten Fall des gleichzeitigen Bestehens einer magnetischen Ablenkung übertragen werden kann. Dabei gehen wir analog vor wie in dem bisher behandelten Fall der Streuung allein, d. h. wir betrachten zunächst die Teilchen-Eigenschaften (Masse, Ladung, Energie) als gegeben und fragen nach der unter dieser Voraussetzung bestehenden Wahrscheinlichkeits-Verteilung für die Merkmale



$x_i$ . Diese Wahrscheinlichkeits-Verteilung bezeichnen wir — unter der speziellen Annahme, daß die Masse  $M$  und die Energie  $E$  die beiden Teilchen-Eigenschaften sind, für die wir uns interessieren — mit

$$f(M; E; x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (12,1)$$

Sind nun bestimmte Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gemessen worden, so hat man diese in die Funktion  $f$  in (12,1) einzusetzen und dieses  $f$  mit den A-priori-Wahrscheinlichkeiten  $G(E) dE$  und  $G(M) dM$  [oder allgemeiner: mit der zwei-parametrischen A-priori-Wahrscheinlichkeit  $G(E, M) dE dM$ ] zu multiplizieren und erhält so die (un-normierte) Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen, an dessen Spur die Merkmale  $x_i$  gemessen wurden, eine Energie  $E$  und eine Masse  $M$  innerhalb der Intervalle  $dE$  bzw.  $dM$  hatte. [Bezüglich der Wahl der A-priori-Wahrscheinlichkeit  $G(M) dM$  für die Masse sei nur erwähnt, daß man diese entweder aus diskreten,  $\delta$ -Funktions-förmigen Anteilen mit den Spitzen bei den bekannten Massen zusammensetzen, oder aber kontinuierlich wählen kann, je nachdem es sich nur darum handelt, zwischen verschiedenen bekannten Massen zu unterscheiden, oder aber eine noch unbekannte neue Masse zu bestimmen. Wir betrachten im folgenden die A-priori-Wahrscheinlichkeit bezüglich  $M$  als kontinuierlich, ohne näher auf ihre Gestalt einzugehen, und bemerken nur noch, daß die spezielle Wahl der A-priori-Wahrscheinlichkeit meist nur einen sehr geringen Einfluß hat, wenn nur die Dimensionszahl  $n$  groß genug ist.] Die Bestimmung der Energie  $E$  und der Masse  $M$  sowie der zugehörigen Genauigkeitsgrenzen hat also nun so zu geschehen, daß man die Lage und die (Schwankungs-) Breiten der Funktion

$$F(M, E) = f(M; E; x_1, x_2, \dots, x_n) G(M) G(E) \quad (12,2)$$

bezüglich  $M$  und  $E$  bestimmt.

Zweckmäßig wird man nun nicht  $M$  und  $E$  selbst, sondern zwei andere Größen, aus denen  $M$  und  $E$  berechnet werden können, als Variable wählen, und zwar die für die Streuung maßgebliche Größe  $x_e$  nach (11,2a) — oder besser:  $1/x_e$  —, für die man jetzt die gegenüber (11,3) genauere Beziehung

$$\frac{1}{x_e} = \frac{p v}{C \sqrt{s}} \quad (12,3)$$

zu verwenden hat, und die magnetische Ablenkung pro Zell-Länge  $s$

$$\alpha_m = \frac{s}{\varrho_H} = \frac{s H e}{p c} \quad (12,4)$$

[vgl. <sup>9</sup> Gl. (6a)]. Die Verteilungsfunktion für die Merkmale bei gegebenen Werten der Parameter (12,3) und (12,4) läßt sich nun ohne weiteres angeben: sie ist von der Gestalt (7,4) [mit  $x_0$  nach (11,1)] mit dem Unterschied, daß im Exponenten die Merkmale  $x_i$  zu ersetzen sind durch  $(x_i - \alpha_m)$  mit  $\alpha_m$  nach (12,4). [Die  $x_i$  sind nach der Seite positiv zu zählen, nach der die magnetische Ablenkung erfolgt; die Differenzen  $(x_i - \alpha_m)$  sind die allein auf Streuung beruhenden Anteile der Merkmale.] Zur Bestimmung der Meßwerte und Fehlerbreiten von  $1/x_e$  und  $\alpha_m$  hat man nun für einige Werte  $\alpha_m$  die Größe

$$Q = \sum_i \sum_k \alpha_{ik}^{-1} (x_i - \alpha_m) (x_k - \alpha_m) \quad (12,5)$$

zu berechnen. Soll die unechte Streuung mitberücksichtigt werden, so ist  $Q$  zugleich eine Funktion des Parameters  $\mu$  nach (11,13), der dann zweckmäßig als Variable an Stelle von  $1/x_e$  verwendet wird. Meßwerte, Fehlerbreiten und zugleich die Korrelation der Größen  $\mu$  und  $\alpha_m$  ergeben sich dann aus dem elliptischen Paraboloid, das an die Funktion  $\psi$  nach (11,15) [die vermöge  $Q$  nun auch von  $\alpha_m$  abhängt und evtl. durch ein Glied  $-\ln G(\alpha_m)$  zu ergänzen ist] in ihrem Minimum angepaßt werden kann. Liegt nur echte Streuung vor, so vereinfacht sich das Verfahren durch Verwendung der Formeln (11,9) und (11,10), worauf wir hier nicht näher eingehen.

### § 13. Praktisch-numerische Methoden zur Berechnung von $Q$

Im vorliegenden Paragraphen sollen bequeme praktische Methoden zur Berechnung der quadratischen Form  $Q$  nach (8,1) aus den gemessenen Merkmal-Werten entwickelt werden. Wir wenden uns dabei zunächst den Fällen Ib und IIa zu, entsprechend der Wahl der „Winkel zwischen besten Geraden“  $\bar{\alpha}_i$  bzw. der Sehnwinkel  $\omega_i$  als Merkmale. Die reduzierte Kopplungsmatrix hat in diesen Fällen die einfache Gestalt (8,2) und hängt somit nur von dem einen Parameter  $\varepsilon (= A_{12}/A_{11})$  ab. Dieser hat im Falle IIa den Wert  $1/4$  (vgl. Tab. 5); im Falle Ib, in dem wir das Zusammenwirken von echter und unechter Streuung berücksichtigen, hängt er von dem Parameter  $\mu$  nach (11,13) ab, und zwar folgt nach (11,14) mit den betreffenden Zahlen in Tab. 5 und 8:

$$\varepsilon = \frac{\frac{9}{52} - \frac{1}{2}\mu}{1 + \mu}. \quad (13,1)$$

In Tab. 9 ist hiernach  $\varepsilon$  als Funktion von  $\mu$  tabuliert. — Wir bemerken nun, daß die Größen  $D_n$  nach (8,4) nur von dem Parameter  $\varepsilon^2$  abhängen, der nach (13,1) auf den Bereich  $0 \leq \varepsilon^2 \leq 1/4$  beschränkt ist. In diesem Bereich verhalten sich die Lösungen von (8,4) (bei festem  $\varepsilon^2$  als Funktion des Index  $n$  betrachtet) mit wachsendem  $n$  exponentiell abfallend, und zwar lautet die explizite Lösung der Differenzgleichung (8,4) unter Beachtung der Anfangsbedingung  $D_0 = D_1 = 1$  für den Bereich  $\varepsilon^2 < 1/4$  und mit Benutzung der Abkürzung

$$q = \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}: \quad (13,2)$$

$$D_n = \frac{1}{q} \left[ \left( \frac{1+q}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-q}{2} \right)^{n+1} \right] \quad (13,3)$$

oder auch

$$D_n = \frac{1}{q} \left( \frac{1+q}{2} \right)^{n+1} \cdot K_n \quad (13,3')$$

mit den (mit wachsendem  $n$  rasch gegen Eins gehenden) „Korrekturfaktoren“

$$K_n = 1 - \left( \frac{1-q}{1+q} \right)^{n+1}. \quad (13,4)$$

Man überzeugt sich leicht, daß (13,3) mit der Polynom-Darstellung (8,5) übereinstimmt. — Zur Ergänzung sei hier noch die für den Grenzfall  $\varepsilon^2 = 1/4$  (d. h. für rein-unechte Streuung) gültige Formel angeben:

$$D_n = (n+1)/2^n \quad (\varepsilon^2 = 1/4). \quad (13,3'')$$

Geht man mit dem Ausdruck (13,3') für die  $D_n$  in Gl. (8,6) für die  $a_{ik}^{-1}$  ein, so folgt (unter der Annahme, daß  $k > i$ ):

$$a_{ik}^{-1} = a_{ki}^{-1} = \left( \frac{-2\varepsilon}{1+q} \right)^{k-i} \frac{1}{q} K_{i-1} K_{n-k} / K_n. \quad (13,5)$$

Um nun aus den gemessenen Merkmal-Werten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die quadratische Form  $Q$  zu berechnen, geht man am bequemsten so vor, daß man zunächst mit Hilfe der Korrekturfaktoren (13,4) die zwei Serien korrigierter Merkmale

$\mu$	$\varepsilon$	$q^{-1}$	$\frac{-2\varepsilon}{1+q}$	$\frac{1-q}{1+q}$	$\mu$	$\varepsilon$	$q^{-1}$	$\frac{-2\varepsilon}{1+q}$	$\frac{1-q}{1+q}$
0,00	+ 0,17308	1,0659	− 0,17860	0,0319	0,32	+ 0,00991	1,0002	− 0,00991	0,0001
0,01	+ 0,16641	1,0604	− 0,17129	0,0293	0,33	+ 0,00607	1,00010	− 0,00607	0,00005
0,02	+ 0,15988	1,0554	− 0,16418	0,0270	0,34	+ 0,00230	1,00005	− 0,00230	0,00003
0,03	+ 0,15348	1,0508	− 0,15728	0,0247	0,35	− 0,00142	1,00000	+ 0,00071	0,00000
0,04	+ 0,14719	1,0464	− 0,15059	0,0227	0,36	− 0,00509	1,00005	+ 0,00255	0,00003
0,05	+ 0,14103	1,0423	− 0,14395	0,0207	0,37	− 0,00870	1,00015	+ 0,00870	0,00008
0,06	+ 0,13498	1,0385	− 0,13753	0,0189	0,38	− 0,01226	1,0003	+ 0,01227	0,00015
0,07	+ 0,12905	1,0351	− 0,13128	0,0172	0,39	− 0,01577	1,0005	+ 0,01578	0,00025
0,08	+ 0,12322	1,0318	− 0,12515	0,0156	0,40	− 0,01923	1,00075	+ 0,01924	0,0004
0,09	+ 0,11750	1,0288	− 0,11917	0,0142	0,45	− 0,03581	1,00255	+ 0,03586	0,0013
0,10	+ 0,11189	1,0261	− 0,11342	0,0129	0,50	− 0,05128	1,0053	+ 0,05142	0,0026
0,11	+ 0,10638	1,0234	− 0,10761	0,0116	0,55	− 0,06576	1,0088	+ 0,06604	0,0044
0,12	+ 0,10096	1,0270	− 0,10201	0,0104	0,60	− 0,07923	1,0128	+ 0,07983	0,0064
0,13	+ 0,09564	1,0188	− 0,09654	0,0093	0,65	− 0,09208	1,0174	+ 0,09287	0,0086
0,14	+ 0,09042	1,0168	− 0,09117	0,0083	0,70	− 0,10407	1,0224	+ 0,10523	0,0111
0,15	+ 0,08528	1,0149	− 0,08591	0,0074	0,75	− 0,11538	1,0278	+ 0,11696	0,0173
0,16	+ 0,08024	1,0130	− 0,08076	0,0065	0,80	− 0,12607	1,0334	+ 0,12814	0,0164
0,17	+ 0,07528	1,0115	− 0,07571	0,0057	0,85	− 0,13617	1,0393	+ 0,13880	0,0193
0,18	+ 0,07040	1,0101	− 0,07076	0,0050	0,90	− 0,14575	1,0454	+ 0,14898	0,0222
0,19	+ 0,06561	1,0087	− 0,06590	0,0043	0,95	− 0,15483	1,0517	+ 0,15873	0,0252
0,20	+ 0,06090	1,0075	− 0,06112	0,0037	1,00	− 0,16346	1,0581	+ 0,16808	0,0283
0,21	+ 0,05626	1,0064	− 0,05644	0,0032	2,00	− 0,27564	1,1986	+ 0,30054	0,0903
0,22	+ 0,05170	1,0054	− 0,05313	0,0027	3,00	− 0,23173	1,3365	+ 0,37951	0,1440
0,23	+ 0,04722	1,0045	− 0,04732	0,0023	4,00	− 0,36538	1,4648	+ 0,43428	0,1886
0,24	+ 0,04280	1,0037	− 0,04288	0,0019	5,00	− 0,38782	1,5843	+ 0,47500	0,2261
0,25	+ 0,03862	1,0030	− 0,03852	0,0015	10,00	− 0,43887	2,087	+ 0,59323	0,3519
0,26	+ 0,03419	1,0024	− 0,03423	0,0012	20,00	− 0,46795	2,839	+ 0,69213	0,4791
0,27	+ 0,02998	1,0022	− 0,03001	0,0011	30,00	− 0,47829	3,431	+ 0,74067	0,5486
0,28	+ 0,02584	1,0013	− 0,02586	0,0007	40,00	− 0,48358	3,934	+ 0,77114	0,5946
0,29	+ 0,02177	1,0009	− 0,02178	0,0005	50,00	− 0,48680	4,381	+ 0,79267	0,6283
0,30	+ 0,01775	1,0006	− 0,01776	0,0003	100,00	− 0,49827	12,026	+ 0,92008	0,8465
0,31	+ 0,01380	1,0004	− 0,01380	0,0002	Fall IIa:	+ 0,25	1,1547	− 0,26795	0,0718

Tab. 9. Die Koeffizienten zur Berechnung von  $Q$  im Fall Ib als Funktionen des Parameters.

$$x_1' = K_0 x_1, x_2' = K_1 x_2, \dots, x_n' = K_{n-1} x_n \quad (13,6a)$$

und

$$x_1'' = K_{n-1} x_1, x_2'' = K_{n-2} x_2, \dots, x_n'' = K_0 x_n \quad (13,6b)$$

bildet. Mit deren Hilfe drückt sich dann  $Q$  in der einfachen Form aus:

$$Q = \frac{1}{q K_n} \left\{ (x_1' x_1'' + x_2' x_2'' + \dots + x_n' x_n'') + 2 \left( \frac{-2\varepsilon}{1+q} \right) (x_1' x_2'' + x_2' x_3'' + \dots + x_{n-1}' x_n'') + 2 \left( \frac{-2\varepsilon}{1+q} \right)^2 (x_1' x_3'' + x_2' x_4'' + \dots + x_{n-2}' x_n'') + \dots \right\}. \quad (13,7)$$

Die dafür nötigen Zahlkoeffizienten, insbesondere  $1/q$  und  $(-2\varepsilon)/(1+q)$  sowie die zur Bestimmung der  $K_n$  nach (13,4) benötigten  $(1-q)/(1+q)$  sind als Funktionen von  $\mu$  in Tab. 9 aufgeführt. — Bei großen  $n$  erhält man übrigens bereits eine brauchbare Näherung, wenn man die  $K_n$  sämtlich durch Eins ersetzt.

In Fall II b ist die Kopplungsmatrix  $a_{ik}$  von der Form (8,9), wobei die beiden Parameter  $\varepsilon$  und  $\delta$  gemäß (11,14) und mit den auf den Fall II b bezüglichen Zahlen der Tab. 5 und 8 von dem Parameter  $\mu$  abhängen. Bei gegebenen  $\varepsilon$  und  $\delta$  folgen die  $\bar{D}_n$  und  $F_n$  aus den Rekursionsformeln (8,10) und (8,12), die sich (ähnlich wie die  $D_n$  im Fall I b) mit wachsendem  $n$  rasch einem exponentiellen Grenzwert nähern. Geht man mit diesen asymptotischen Ausdrücken der  $\bar{D}_n$  und  $F_n$  in die Formeln (8,18a und b) ein, so erhält man asymptotische Ausdrücke der  $a_{ik}^{-1}$ , die nur von der Differenz  $k-i$  abhängen [entsprechend der Formel (13,5), wenn man dort die  $K$  sämtlich = 1 setzt]. In dieser asymptotischen Näherung läßt sich also die quadratische Form  $Q$  in der einfachen Gestalt schreiben:

$$Q = C_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + C_1 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + C_2 \sum_{i=1}^{n-2} x_i x_{i+2} + \dots \quad (13,8)$$

$\mu$	$\varepsilon$	$\delta$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0,0	+ 0,39394	+ 0,01515	+ 1,56320	— 1,45370	+ 0,63536	— 0,27355
0,1	+ 0,29752	+ 0,02273	+ 1,22096	— 0,76266	+ 0,18295	— 0,03900
0,2	+ 0,21717	+ 0,03472	+ 1,10067	— 0,46714	+ 0,02251	+ 0,02379
0,3	+ 0,14918	+ 0,04487	+ 1,04595	— 0,29198	— 0,05343	+ 0,02127
0,4	+ 0,09091	+ 0,05357	+ 1,02047	— 0,16877	— 0,09579	+ 0,01750
0,5	+ 0,04040	+ 0,06111	+ 1,00928	— 0,07278	— 0,12109	+ 0,00911
1,0	— 0,13636	+ 0,08750	+ 1,04804	+ 0,24687	— 0,15622	— 0,04235

Tab. 10. Koeffizienten zur asymptotischen Berechnung von  $Q$  im Falle II b.

$n$	$\mu = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1,0
$\bar{D}_n$							
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	0,84481	0,91148	0,95284	0,97774	0,99174	0,99836	0,98140
3	0,69410	0,82512	0,90774	0,95547	0,98149	0,99320	0,95842
4	0,56739	0,74786	0,86476	0,93361	0,97127	0,98823	0,93554
5	0,46339	0,67793	0,82381	0,91225	0,96115	0,98308	0,91320
6	0,37839	0,61454	0,78480	0,89137	0,95114	0,97796	0,89138
$F_n$							
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,98485	0,97727	0,96528	0,95513	0,94643	0,93889	0,91250
2	0,82989	0,88927	0,91932	0,93489	0,94106	0,94099	0,90156
3	0,68152	0,80491	0,87582	0,91352	0,93107	0,93569	0,87953
4	0,55706	0,72956	0,83435	0,89262	0,92139	0,93105	0,85858
5	0,45495	0,66135	0,79484	0,87219	0,91179	0,92618	0,83807
6	0,37149	0,59951	0,75720	0,85224	0,90229	0,92135	0,81868
$\bar{D}_n = a p^n; F_n = b p^n.$							
$p$	0,81652	0,90651	0,95265	0,97712	0,98958	0,99497	0,97611
$a$	1,27682	1,10750	1,04995	1,02418	1,01281	1,00797	1,03129
$b$	1,25356	1,08041	1,01302	0,97921	0,96080	0,94965	0,94645

Tab. 11. Die Größen  $\bar{D}_n$  und  $F_n$  für  $n=0$  bis 6 und ihr asymptotisches Verhalten für große  $n$  als Funktionen von  $\mu$ .

Die Abweichungen von dieser asymptotischen Gestalt lassen sich nach den im § 14 angegebenen Methoden abschätzen und sind gering, sofern nur die Dimensionszahl  $n$  nicht zu klein ist. Im allgemeinen wird es daher vollauf genügen, die asymptotische Gl. (13,8) zu verwenden, wobei die darin auftretenden Koeffizienten  $C_j$  der Tab. 10 als Funktionen von  $\mu$  zu entnehmen sind. — Ist die Dimensionszahl  $n$  klein (einige Male die Einheit) und wünscht man genauer zu rechnen, so hat man auf die Formeln des § 8 zurückzugreifen unter Benutzung der genauen Zahlenwerte der  $\bar{D}_n$  und  $F_n$  in Tab. 11.

Es sei noch erwähnt, daß sich die den Fall IIb betreffenden Rekursionsformeln (8,10) für  $\bar{D}_n$ , (8,12) für  $F_n$  und (8,16) für  $\Delta_n$  für den Fall, daß nur unechte Streuung vorliegt (also mit den Parameterwerten  $\varepsilon = -2/3$  und  $\delta = 1/6$ ) leicht explizit lösen lassen, und zwar erhält man [analog zu der den Fall Ib betreffenden Formel (13,3'') für  $\bar{D}_n$ ]

$$\bar{D}_n = \left[ \binom{n+4}{4} + \binom{n+3}{4} \right] \left( \frac{1}{6} \right)^n, \quad (13,9a)$$

$$F_n = \binom{n+4}{4} \left( \frac{1}{6} \right)^n \quad (13,9b)$$

$$\text{und} \quad \Delta_n = \binom{n+3}{3} \left( -\frac{1}{6} \right)^n. \quad (13,9c)$$

Durch Einsetzen dieser Formeln in (8,18a und b) folgen daraus explizite Ausdrücke für die  $a_{ik}^{-1}$ , die bei der systematischen Untersuchung von Spuren mit rein-unechter Streuung von Nutzen sein können.

#### § 14. Die Verwendung anderer quadratischer Formen der Merkmale; Eliminierung bzw. Bestimmung des Anteils der unechten Streuung<sup>18</sup>

Bisher hatten wir ausschließlich die spezielle quadratische Form  $Q$  (8,1) zur Auswertung der gemessenen Merkmale  $x_i$  einer Spur in Betracht gezogen. Im Grunde genommen kann nun jede andere quadratische Form

$$R = \sum_i \sum_k b_{ik} x_i x_k \quad (14,1)$$

mit beliebigen Koeffizienten  $b_{ik}$  zu dem gleichen Zwecke verwendet werden. Freilich wird — wie wir

zeigen werden — bei der speziellen Wahl  $b_{ik} = a_{ik}^{-1}$  das Maximum an statistischer Genauigkeit erreicht, und in dieser Hinsicht ist also die Verwendung von  $Q$  am vorteilhaftesten. Durch spezielle andere Wahl der Koeffizienten  $b_{ik}$  kann jedoch erreicht werden, die von der echten und von der unechten Streuung herrührenden Anteile voneinander zu trennen und einzeln zu bestimmen. Es besteht also damit die Möglichkeit, den Parameter  $\mu$  nach (11,13) in jedem Einzelfall direkt zu bestimmen. Legt man auf größtmögliche Genauigkeit Wert, so kann man zunächst (unter Verzicht auf größte Genauigkeit)  $\mu$  bestimmen und anschließend auf Grund des gefundenen  $\mu$ -Wertes die Auswertung nach den Methoden der §§ 11 und 13 wiederholen.

Wir betrachten die der Verteilungsfunktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  zugeordnete Fourier-Transformierte

$$\exp \left[ -\frac{x_0^2}{4} \sum_i \sum_k a_{ik} \xi_i \xi_k \right]. \quad (14,2)$$

Der Mittelwert (Erwartungswert) z. B. eines Produktes  $x_i x_k$  (mit gegebenen Indizes  $i$  und  $k$ ) kann in bekannter Weise durch Differenzieren von (14,2) nach  $\xi_i$  und  $\xi_k$  und anschließendes Nullsetzen sämtlicher Argumente  $\xi_j$  ermittelt werden und ergibt sich somit zu  $(x_0^2/2) a_{ik}$ . Für den Mittelwert der quadratischen Form (14,1) folgt

$$\bar{R} = \frac{x_0^2}{2} \sum_i \sum_k b_{ik} a_{ik}. \quad (14,3)$$

In der gleichen Weise kann man auch das Quadrat der Schwankung von  $R$  ausrechnen und erhält

$$\bar{R}^2 - R^2 = \frac{x_0^4}{2} \sum_i \sum_k \sum_{i'} \sum_{k'} a_{ik} b_{kk'} a_{k'i'} b_{i'i}. \quad (14,4)$$

( $b_{ik}$  und  $a_{ik}$  können beide als symmetrisch angenommen werden.) Die Summe in (14,3) kann als die Spur  $\text{Sp}(ba)$  des Matrizen-Produktes  $ba$  und die Summe in (14,4) als die Spur  $\text{Sp}(baba)$  betrachtet werden. Für das relative Schwankungsquadrat ergibt sich somit kurz:

$$\left( \frac{\delta R}{R} \right)^2 = 2 \frac{\text{Sp}(abab)}{[\text{Sp}(ab)]^2}. \quad (14,5)$$

Wählt man speziell  $b_{ik} = a_{ik}^{-1}$ , so geht  $ab$  und  $abab$  in die  $n$ -dimensionale Einheitsmatrix über, womit

<sup>18</sup> Anm. b. d. Korr.: Es sei hier ausdrücklich festgestellt, daß die diesem Paragraphen zugrunde liegende Idee auf Moyals<sup>12</sup> zurückgeht. Sie wurde dem Verf. vor dem Erscheinen von<sup>12</sup> dankenswerterweise durch mündliche Diskussionen mit Herrn B. d'Espagnat bekannt, die den Anlaß zum Entstehen dieses Paragraphen gaben. Die damals von Hrn. d'Espagnat

erwähnte Priorität Moyals kam leider in den 1950 veröffentlichten Exemplaren dieser Arbeit nicht zum Ausdruck. — D'Espagnat<sup>9a</sup> diskutiert die Moyalsche Methode in sehr durchsichtiger Weise am Beispiel des „sagitta“-Falles, genau entsprechend unserem IIC<sup>13,14,15</sup> im Grenzfall  $\kappa \ll 1$ .

(14,5) den speziellen Wert  $2/n$  annimmt. Wir behaupten nun, daß dieser spezielle Wert der kleinste ist, den (14,5) überhaupt annehmen kann. Zum Beweise betrachten wir zwei  $n$ -reihige quadratische Matrizen  $c$  und  $e$ , die wir der Einfachheit halber sogleich als reell und symmetrisch annehmen. Für diese gilt dann

$$\text{Sp}(c^2) \text{Sp}(e^2) \geq [\text{Sp}(ec)]^2, \quad (14,6)$$

was — in Komponenten ausgeschrieben — nichts anderes ist als die Schwarzsche Ungleichung. Identifiziert man speziell  $c$  mit dem Matrix-Produkt  $ab$  und  $e$  mit der Einheitsmatrix, so folgt die Behauptung.

Die Bedeutung von (14,3) und (14,4) ist zunächst die folgende: Hat man sehr viele Spuren von Teilchen mit bekannten und untereinander gleichen Eigenschaften (insbesondere Energie), für die also die Konstante  $x_0$  einen festen und bekannten Wert hat, und mißt man für jede dieser Spuren die  $x_i$  und bildet  $R$  nach (14,1), so ergeben sich Mittelwert und Schwankung der so bestimmten  $R$  gemäß (14,3) und (14,4). — Dem üblichen statistischen Gebrauche entsprechend kann man umgekehrt (14,3) und (14,4) dazu verwenden, um auf Grund des bei einer einzelnen Spur durch Messung bestimmten Wertes  $R$  eine statistische Aussage über die unbekannte Größe  $x_0$  (bzw.  $x_0^{-1}$ ) zu gewinnen. Für den „Meßwert“ und die Schwankung von  $x_0^{-1}$  kommt man so zu den respektiven Formeln

$$x_0^{-1} = \left[ \frac{\text{Sp}(ab)}{2R} \right]^{1/2} \quad (14,7)$$

$$\text{und} \quad \delta(x_0^{-1}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Sp}(abab)}{R \text{Sp}(ab)} \right]^{1/2}. \quad (14,8)$$

Für  $b_{ik} = a_{ik}^{-1}$  gehen diese Formeln in die früheren (11,9) und (11,10) über (mit dem Unterschied, daß

der bei den dortigen genaueren statistischen Betrachtungen vom Energiespektrum herrührende Exponent  $\gamma$  jetzt nicht auftritt).

Wir wollen nun annehmen, daß echte und unechte Streuung gemeinsam auftritt, und haben dann ausführlicher im Exponenten von (14,2)

$$x_0^2 a_{ik} = x_e^2 a_{ik}^{(e)} + x_u^2 a_{ik}^{(u)} \quad (14,9)$$

einzusetzen. Die Formeln (14,3) und (14,4) für den Mittelwert und die Schwankung von  $R$  gehen damit über in

$$\bar{R} = \frac{x_e^2}{2} \text{Sp}(b a^{(e)}) + \frac{x_u^2}{2} \text{Sp}(b a^{(u)}) \quad (14,10)$$

und

$$\begin{aligned} \bar{R}^2 - R^2 &= \frac{x_e^4}{2} \text{Sp}(b a^{(e)} b a^{(e)}) + x_e^2 x_u^2 \text{Sp}(b a^{(e)} b a^{(u)}) \\ &+ \frac{x_u^4}{2} \text{Sp}(b a^{(u)} b a^{(u)}). \end{aligned} \quad (14,11)$$

Wir können nun die Matrix  $b_{ik}$  speziell so wählen, daß entweder das zweite oder das erste Glied rechts in (14,10) verschwindet. Diese speziellen Matrizen  $b$  seien mit  $b^{(e)}$  bzw.  $b^{(u)}$  bezeichnet, für die also gelten soll

$$\text{Sp}(b^{(e)} a^{(u)}) = 0 \text{ bzw. } \text{Sp}(b^{(u)} a^{(e)}) = 0. \quad (14,12)$$

Die mit den speziellen  $b$  gebildeten quadratischen Formen (14,1) seien mit  $R_e$  bzw.  $R_u$  bezeichnet. Mit der entsprechenden Umdeutung wie oben kann man damit den auf Grund der Meßergebnisse an einer einzelnen Spur erhaltenen Wert  $R_e$  verwenden, um  $x_e$  zu bestimmen, und bekommt so — analog zu (14,7) —

$$x_e^{-1} = \left[ \frac{\text{Sp}(a^{(e)} b^{(e)})}{2 R_e} \right]^{1/2} \quad (14,13)$$

mit der zugehörigen Schwankung

$$\delta(x_e^{-1}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Sp}(a^{(e)} b^{(e)} a^{(e)} b^{(e)}) + 2 \mu \text{Sp}(a^{(e)} b^{(e)} a^{(u)} b^{(e)}) + \mu^2 \text{Sp}(a^{(u)} b^{(e)} a^{(u)} b^{(e)})}{R_e \text{Sp}(a^{(e)} b^{(e)})} \right]^{1/2}. \quad (14,14)$$

Das Auftreten von  $\mu = x_u^2/x_e^2$  in (14,14) besagt, daß die Genauigkeit der Bestimmung von  $x_e$  nach (14,13) mit davon abhängt, in welchem Grade die unechte Streuung mitbeteiligt ist. — Die analogen Formeln für  $x_u$  erhält man aus (14,13) und (14,14) durch Vertauschung der Indizes  $(e)$  und  $(u)$  und Ersetzung von  $\mu$  durch  $\mu^{-1}$ .

Die Bedingungen (14,12) können offenbar auf vielfältige Weise befriedigt werden, und man könnte daran denken, als Nebenbedingung zu ver-

langen, daß die Schwankung möglichst klein sein soll. Statt dessen wollen wir uns damit begnügen, für die Matrix  $b^{(e)}$  bzw.  $b^{(u)}$  einen möglichst einfachen Ansatz zu machen, der (14,12) befriedigt. Dazu setzen wir sämtliche Diagonalelemente  $b_{ii}$  einander gleich und zwar  $= 1$ ; deren Nachbarelemente seien ebenfalls einander gleich und zwar  $b_{i, i+1} = b_{i, i-1} = \sigma$ . Die Konstante  $\sigma$  (für die wir je nachdem  $\sigma_e$  bzw.  $\sigma_u$  schreiben) soll so bestimmt werden, daß die eine bzw. andere Bedingung (14,12) erfüllt



wird. Aus den bekannten Matrizen  $a_{ik}^{(e)}$  und  $a_{ik}^{(u)}$  für die Fälle Ib und IIb folgt dann

$$\varepsilon_e = 13/33; \varepsilon_u = -2/3, \quad (14,16b)$$

für den Fall Ib:

$$\sigma_e = \frac{n}{n-1} \quad \text{und} \quad \sigma_u = -\frac{26n}{9(n-1)} \quad (14,15a)$$

und für den Fall IIb:

$$\sigma_e = \frac{3n}{4(n-1)} \quad \text{und} \quad \sigma_u = -\frac{33n}{26(n-1)}. \quad (14,15b)$$

Führt man noch die folgende Bezeichnung ein

für den Fall Ib:

$$\varepsilon_e = 9/52; \varepsilon_u = -1/2 \quad (14,16a)$$

so lautet die Gl. (14,13) ausführlich

$$x_e^{-1} = \left[ \frac{n+2(n-1)\varepsilon_e\sigma_e}{2(\sum_i x_i^2 + 2\sigma_e \sum_i x_i x_{i+1})} \right]^{1/2} \quad (14,13')$$

und die entsprechende Formel für  $x_u^{-1}$  geht daraus durch Ersetzen von  $\sigma_e$  und  $\varepsilon_e$  durch resp.  $\sigma_u$  und  $\varepsilon_u$  hervor. Die zugehörige Schwankung kann in entsprechender Weise nach (14,14) ausgewertet werden, was dem Leser überlassen bleiben möge.

## Zur Behandlung der Zweizentren-Wechselwirkungsintegrale\*

Von H. PREUSS

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 10a, 211—215 [1955]; eingegangen am 15. Januar 1955)

Es werden die zur Zeit vorliegenden Möglichkeiten zur numerischen Bestimmung der Zweizentren-Wechselwirkungsintegrale diskutiert und ein neuer vereinfachender Berechnungsweg angegeben, der bei Verwendung von elektronischen Rechenmaschinen durchgeführt werden kann. Der Anwendungsbereich einer vom Verfasser früher angegebenen Abschätzung für Integrale wird erweitert. Abschließend wird eine zweckmäßige Bezeichnungsweise der Integrale vorgeschlagen und auf einen numerischen Zusammenhang zwischen Austauschintegralen und einfacheren Integraltypen hingewiesen.

In der Theorie der chemischen Bindung stellen bekanntlich die auftretenden Wechselwirkungsintegrale ein umfangreiches mathematisches und numerisches Problem dar, das zur Zeit nur in wenigen Fällen und in speziellen Bereichen für die praktische Anwendung erledigt vorliegt.

Es handelt sich vornehmlich um sieben Integraltypen, die bei der Berechnung der Energie auftreten, wenn die Gesamt molekülfunktion als Produkt von Einelektronenfunktionen angesetzt wird<sup>1</sup>.

Seien die Zentren mit a und b und die Einelektronenfunktionen mit  $\Phi$  bezeichnet (die analytischen Unterscheidungen bezüglich der Quantenzahlen werden durch  $\Phi'$ ,  $\Phi''$ ,  $\Phi'''$  angedeutet), so ergeben sich die Integrale

$$[\Phi_a, \Phi_b'] = \int \Phi_a \Phi_b' d\tau, \quad (1)$$

$$[a^{-1} | \Phi_a, \Phi_b'] = \int \Phi_a \frac{1}{r_a} \Phi_b' d\tau;$$

$$[b^{-1} | \Phi_a, \Phi_a'] = \int \Phi_a \frac{1}{r_b} \Phi_a' d\tau, \quad (2)$$

$$[a^{-2} | \Phi_a, \Phi_b'] = \int \Phi_a \frac{1}{r_a^2} \Phi_b' d\tau;$$

$$[b^{-2} | \Phi_a, \Phi_a'] = \int \Phi_a \frac{1}{r_b^2} \Phi_a' d\tau, \quad (3)$$

$$[\Delta | \Phi_a \Phi_b' | \Phi_a'' \Phi_b'''] = \int \Phi_a \Phi_b' \Delta \Phi_a'' \Phi_b''' d\tau, \quad (4)$$

$$[\Phi_a \Phi_b' | \Phi_a'' \Phi_b'''] = \int \Phi_a (1) \Phi_b' (2) \frac{1}{r_{12}} \Phi_a'' (1) \Phi_b''' (2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (5)$$

$$[\Phi_a \Phi_a' | \Phi_a'' \Phi_b'''] = \int \Phi_a (1) \Phi_a' (2) \frac{1}{r_{12}} \Phi_a'' (1) \Phi_b''' (2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (6)$$

$$[\Phi_b \Phi_a' | \Phi_a'' \Phi_b'''] = \int \Phi_b (1) \Phi_a' (2) \frac{1}{r_{12}} \Phi_a'' (1) \Phi_b''' (2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (7)$$

die man allgemein als Überlappings-, Übergangs- und Impulsintegrale (1), (2, 3), (4) und weiter als Coulomb-Ionen (Hybrid)- und Austauschintegrale bezeichnet (5), (6), (7).

Als Einelektronenfunktion  $\Phi_\lambda$  werden fast durchweg Slater-Funktionen benutzt:

\* Eine Herausgabe aller am Max-Planck-Institut f. Physik (Göttingen) berechneten Integraltabellen ist in der nächsten Zeit beabsichtigt.

<sup>1</sup> H. J. Kopineck, Z. Naturforschg. 5a, 420 [1950].